第5回:海洋数値モデルの計算手法

沿岸海洋モデル POM

シグマ座標系　座標変換

シグマ座標系の方程式

自由表面を解くことの困難(CFL条件)→モード分解計算法

シグマ座標系の問題(圧力勾配、水平拡散の誤差)

方程式の離散化

第5回:海洋数値モデルの計算手法

乱流過程:海表面、海洋内部

運動量・熱・淡水の海表面乱流フラックス

乱流モデル

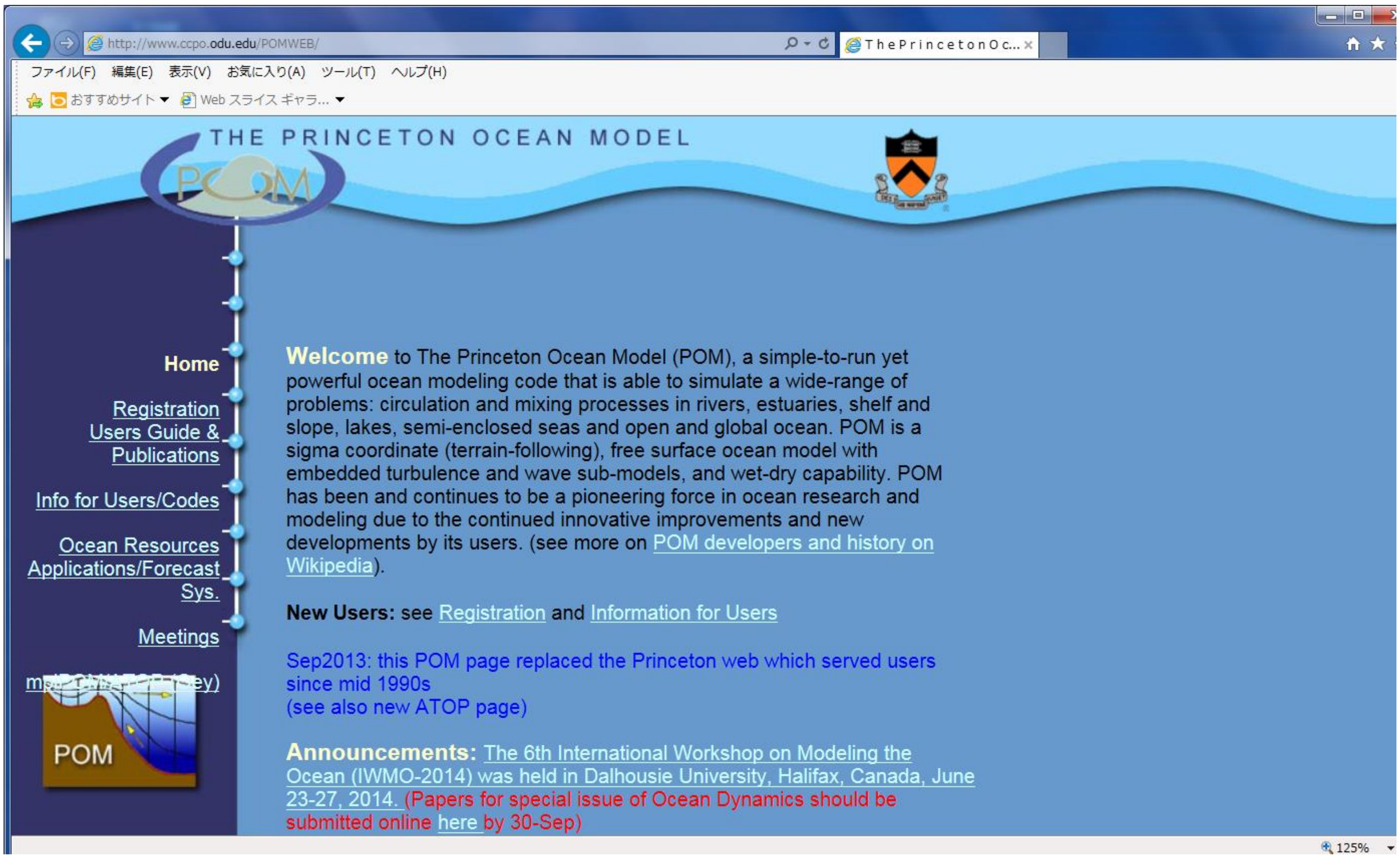
近似のレベル:直接計算、LES、二方程式モデル

メラーヤマダモデル
中西・新野・古市モデル

沿岸海洋モデルPOM

Princeton Ocean Model (POM) プリンストン海洋モデル
(Blumberg and Mellor, 1987)

http://www.ccpo.odu.edu/POMWEB/



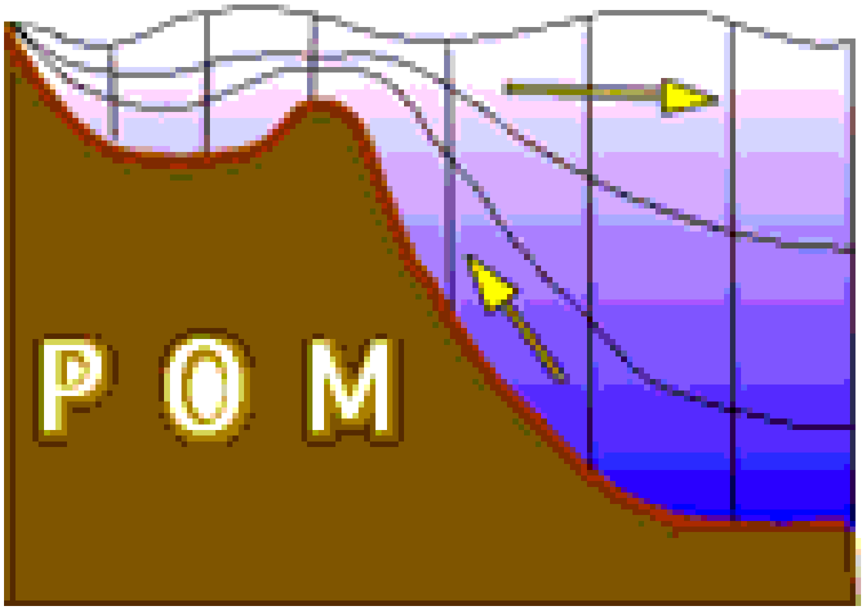
POM:代表的なσ座標系海洋モデル

＜σ座標＞
地形変化が急峻な沿岸
海洋の問題を解くのに
適している

海底境界層を精度良く
表現できる

＜自由表面＞
潮汐も解ける

＜乱流モデル＞
渦粘性拡散係数を与える

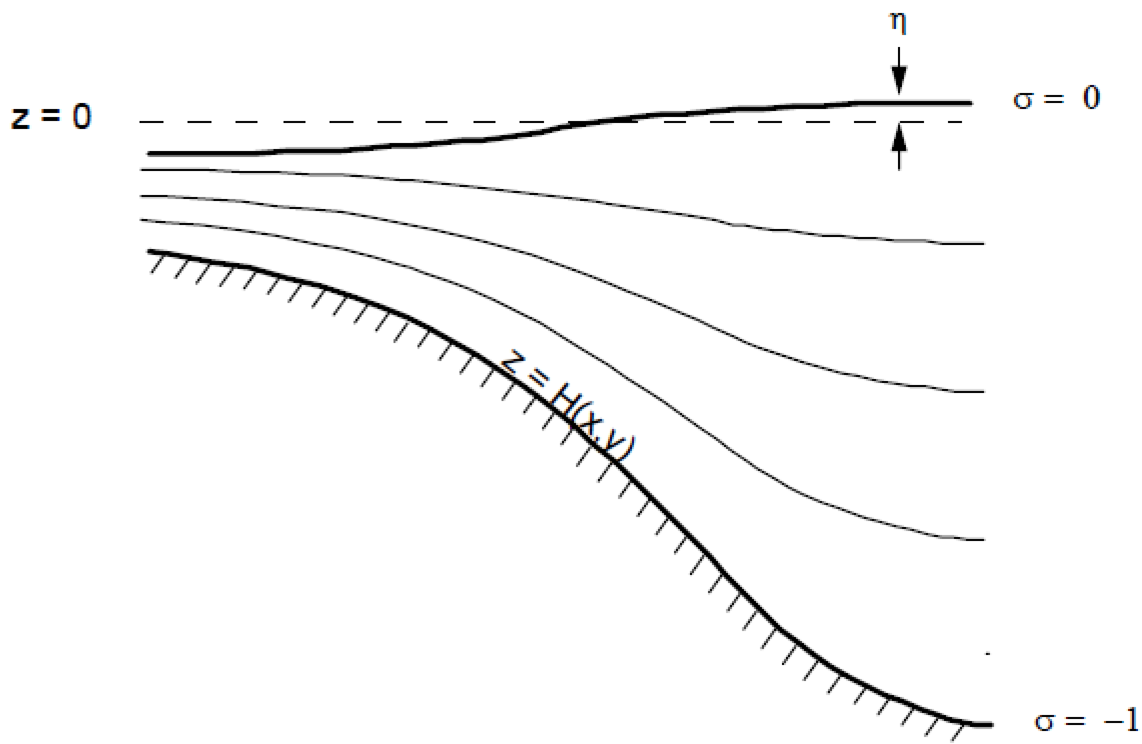


σ-z座標関係

σ-z座標変換

$$\sigma = \frac{z-\eta}{H+\eta}$$

z=η → σ=0
z=-H→σ=-1



σ座標系プリミティブ方程式

連続式と運動方程式 $D = H + \eta$ ωはσ面に垂直な方向の流速

$$\frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial UD}{\partial t} + \frac{\partial U^2 D}{\partial x} + \frac{\partial UVD}{\partial y} + \frac{\partial U\omega}{\partial \sigma} - fVD + gD\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$+ \frac{gD^2}{\rho_o}\int_\sigma^o \left[\frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'}\right] d\sigma' = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_M}{D}\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right] + F_x \qquad (3)$$

$$\frac{\partial VD}{\partial t} + \frac{\partial UVD}{\partial x} + \frac{\partial V^2 D}{\partial y} + \frac{\partial V\omega}{\partial \sigma} + fUD + gD\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$+ \frac{gD2}{\rho_o}\int_\sigma^o \left[\frac{\partial \rho'}{\partial y} - \frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'}\right] d\sigma' = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_M}{D}\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right] + F_y \qquad (4)$$

σ座標プリミティブ方程式系

水温・塩分輸送方程式

$$\frac{\partial TD}{\partial t} + \frac{\partial TUD}{\partial x} + \frac{\partial TVD}{\partial y} + \frac{\partial T\omega}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_H}{D}\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right] + F_T - \frac{\partial R}{\partial z} \tag{5}$$

$$\frac{\partial SD}{\partial t} + \frac{\partial SUD}{\partial x} + \frac{\partial SVD}{\partial y} + \frac{\partial S\omega}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_H}{D}\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right] + F_S \tag{6}$$

鉛直流速とσ面直交方向流速との関係

$$W = \omega + U\left(\sigma\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + V\left(\sigma\frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \sigma\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

自由表面を解くことの困難

計算時間刻みΔtの限界(CFL条件): CΔt< Δx (格子間隔)
Cは表現する波や流速の最大値

自由表面が存在する→「津波」も解ける

「津波」(外部重力波)の位相速度:

$$C = \sqrt{gH}$$

水深5000mならば220m/s

大循環モデルで解きたい黒潮や渦の流速 高々数m/s

計算を効率的に行うために、「津波」のような鉛直一様に動き、速度が速い運動(外部モード)と、黒潮や渦のような、層毎に変動が異なり速度が遅い運動(内部モード)を別々に解く

モード分解：外部モード

鉛直積分した方程式系

$$\overline{U} \equiv \int_{-1}^{o} U \, d\sigma \ .$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U} D}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V} D}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{U} D}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}^2 D}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U}\overline{V} D}{\partial y} - \tilde{F}_x - f\overline{V} D + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = -< wu(0) > + < wu(-1) >$$
$$+ G_x - \frac{gD}{\rho_o} \int_{-1}^{o}\int_{\sigma}^{o} \left[D \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial x} \sigma' \frac{\partial \rho'}{\partial \sigma} \right] d\sigma' \, d\sigma$$

$$\frac{\partial \overline{V} D}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}\overline{V} D}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}^2 D}{\partial y} - \tilde{F}_y + f\overline{U} D + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} = -< wv(0) > + < wv(-1) >$$
$$+ G_y - \frac{gD}{\rho_o} \int_{-1}^{o}\int_{\sigma}^{o} \left[D \frac{\partial \rho'}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial y} \sigma' \frac{\partial \rho'}{\partial \sigma} \right] d\sigma' \, d\sigma$$

短い時間ステップで計算をする

σ座標系に伴う困難

圧力勾配の誤差が大きい

$$\frac{gD^2}{\rho_o}\int_\sigma^o\left[\frac{\partial\rho'}{\partial x}-\frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial\rho'}{\partial\sigma'}\right]d\sigma' \quad \frac{gD2}{\rho_o}\int_\sigma^o\left[\frac{\partial\rho'}{\partial y}-\frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial\rho'}{\partial\sigma'}\right]d\sigma'$$

（第一項）-(第二項)：同じような大きさの数値の差（和）
→ 丸め誤差が大きくなりやすい

１．鉛直平均密度を差し引いて圧力勾配を計算する

$$\rho'' = \rho'(x,y,z)-\overline{\rho'}(z)$$

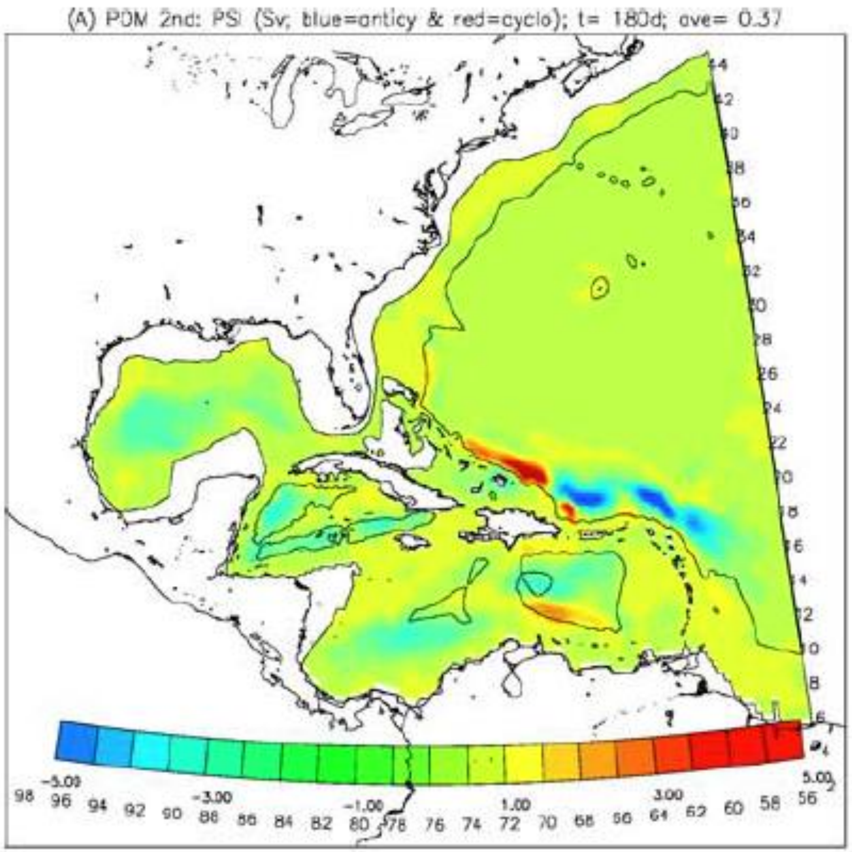
２．海底地形を平滑化する

$$\frac{|H_1-H_2|}{|H_1+H_2|}\le 0.2$$

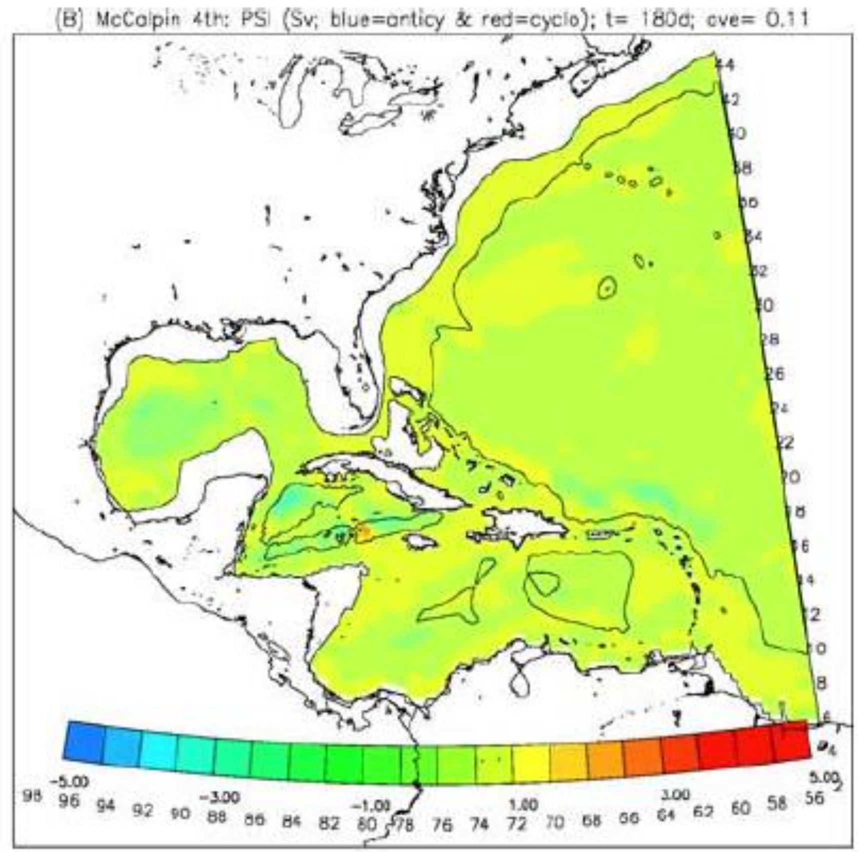
ゼロ外力テスト

(Berntsen and Oey 2010)

計算開始後180日後の鉛直平均流れの強度(流線関数)



２次精度計算式（従来）

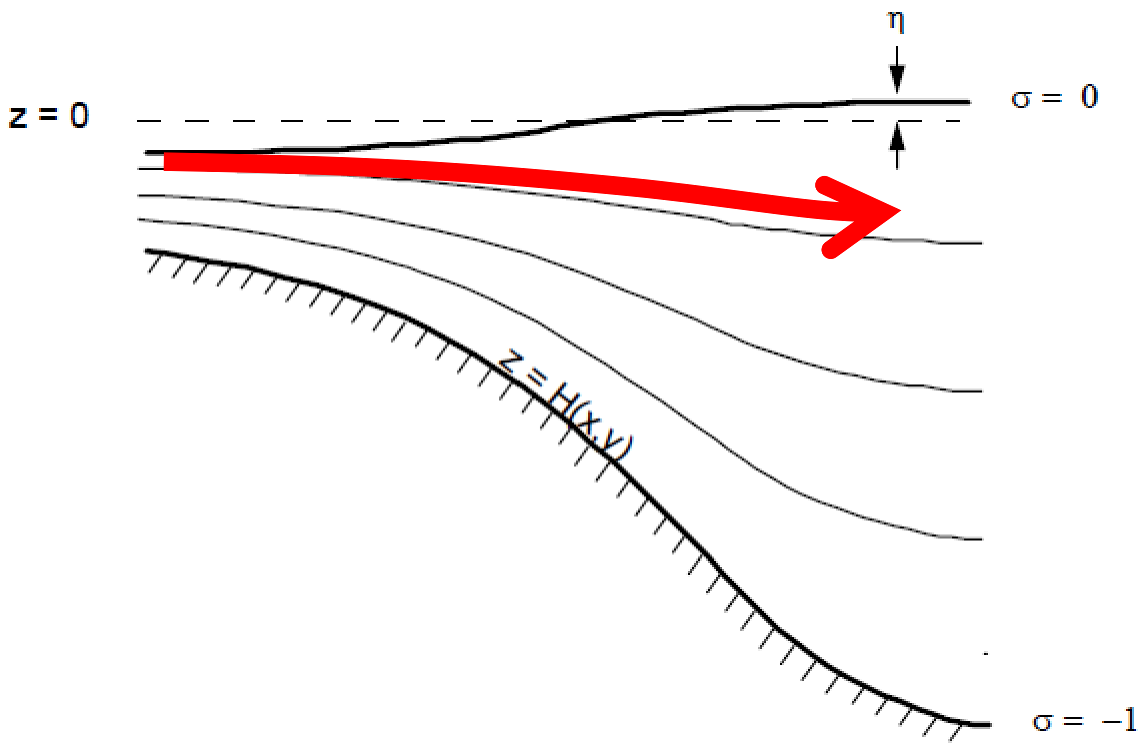


４次精度計算式

本講義で取り扱うsbPOMでは4次精度計算式を使用

σ座標系に伴う困難

σ面に沿った疑似鉛直拡散が生じる

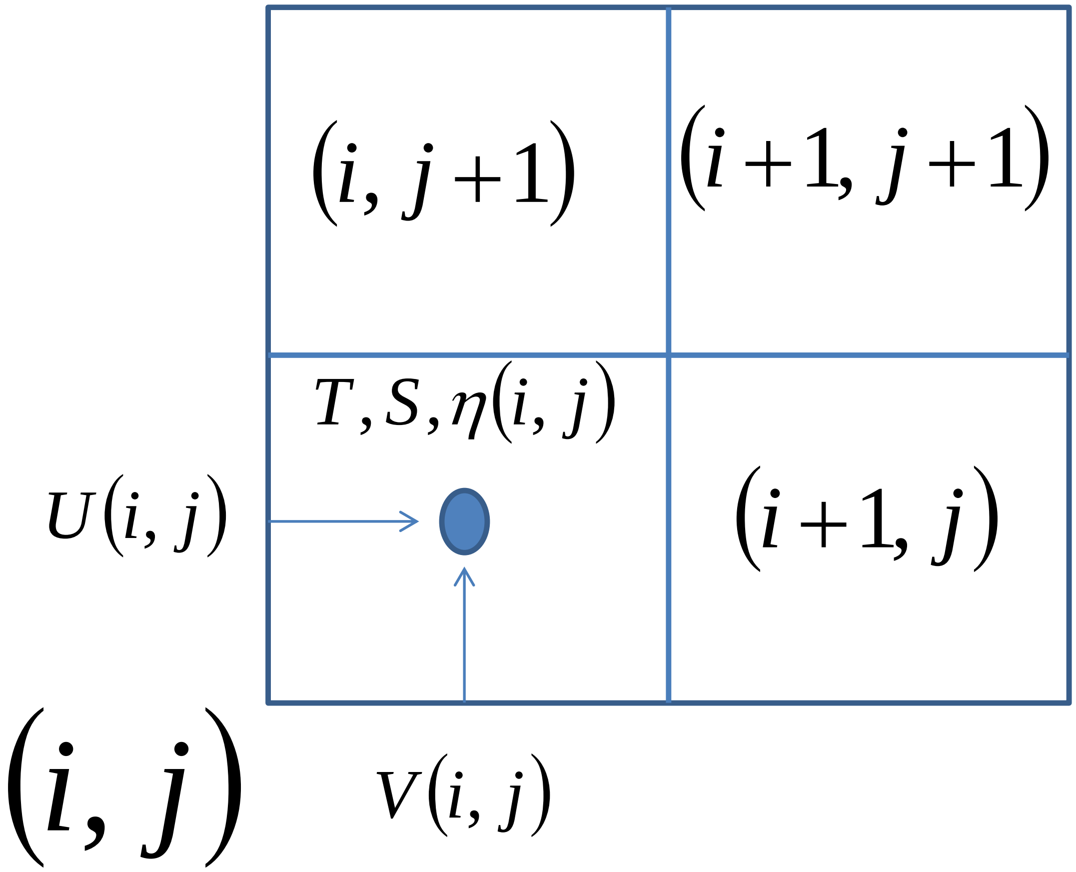


1. 水平流速ゼロの場合は水平拡散無し

2. 気候値を差し引いた変数の拡散のみを計算

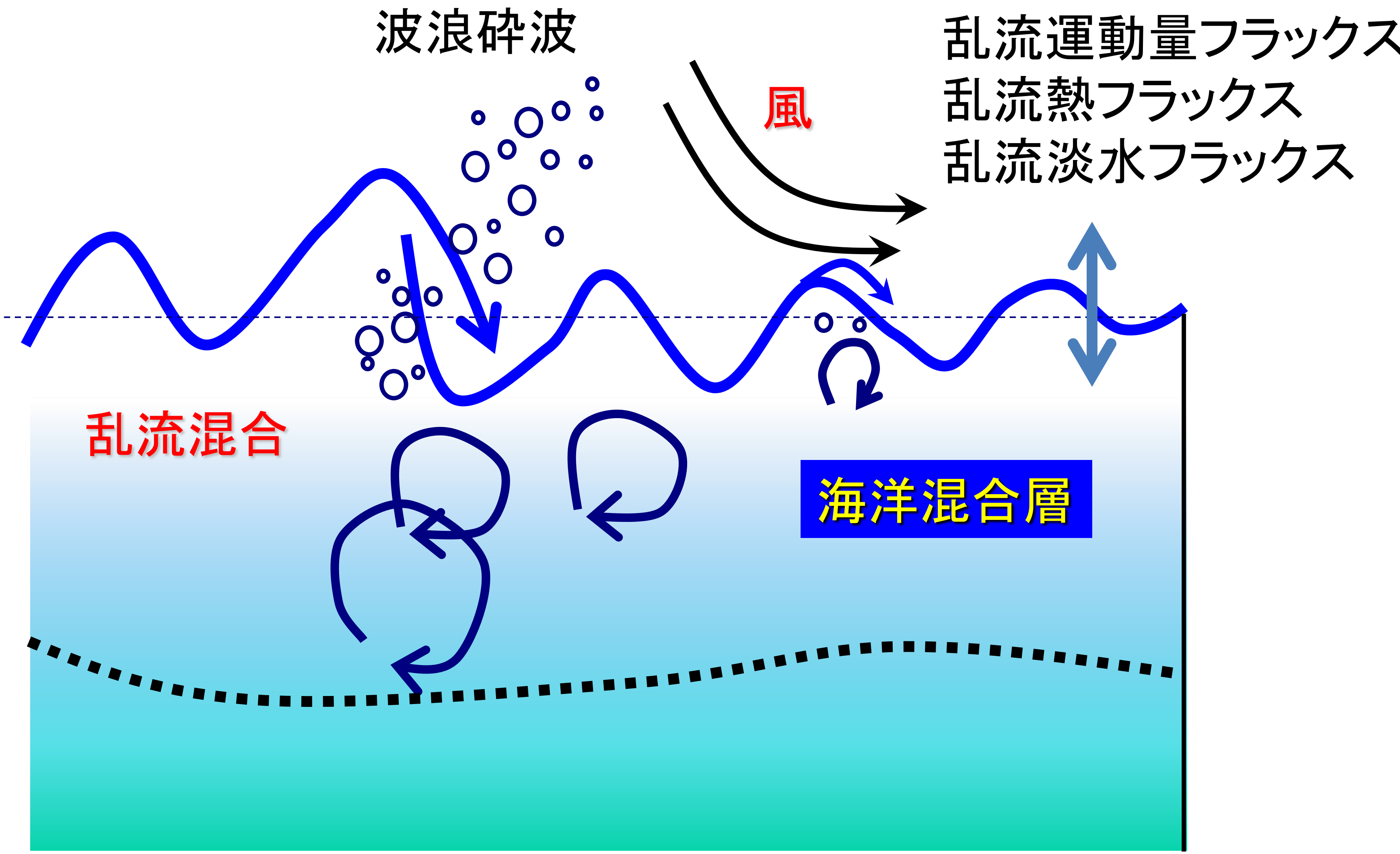
$$T' = T(x, y, \sigma) - T_{c\,\mathrm{lim}}(x, y, \sigma)$$

方程式の離散化→差分法



Arakawa-C 格子

乱流過程：海表面、海洋内部



海表面乱流フラックス

乱流フラックスを直接、数値モデル内で表現することは困難

乱流フラックスを計算可能な量（マクロな量：バルク）を用いて表現する（近似する）ことが必要：パラメタリゼーション

パラメタリゼーションの式と乱流フラックスの計測結果を比較し
パラメタリゼーションの式を確立していく

乱流フラックスの近似式（パラメタリゼーション）：バルク公式

運動量フラックス：風応力

$$K_M\left(\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{1}{\rho_0}\left(\tau_x,\tau_y\right)$$

$$\left(\tau_x,\tau_y\right)=\rho_a D_{rg}\sqrt{\left(u^2{}_{a10m}+v^2{}_{a10m}\right)}\left(u_{a10m},v_{a10m}\right)$$

$$D_{rg}=\begin{cases} 1.14, & \left(\sqrt{u_{10m}^2+v_{10m}^2}<10\right) \\ 0.49+0.065\sqrt{u_{10m}^2+v_{10m}^2}, & \left(10\le\sqrt{u_{10m}^2+v_{10m}^2}<26\right) \\ 0.49+0.065\times 26, & \left(\sqrt{u_{10m}^2+v_{10m}^2}\ge 26\right) \end{cases}$$

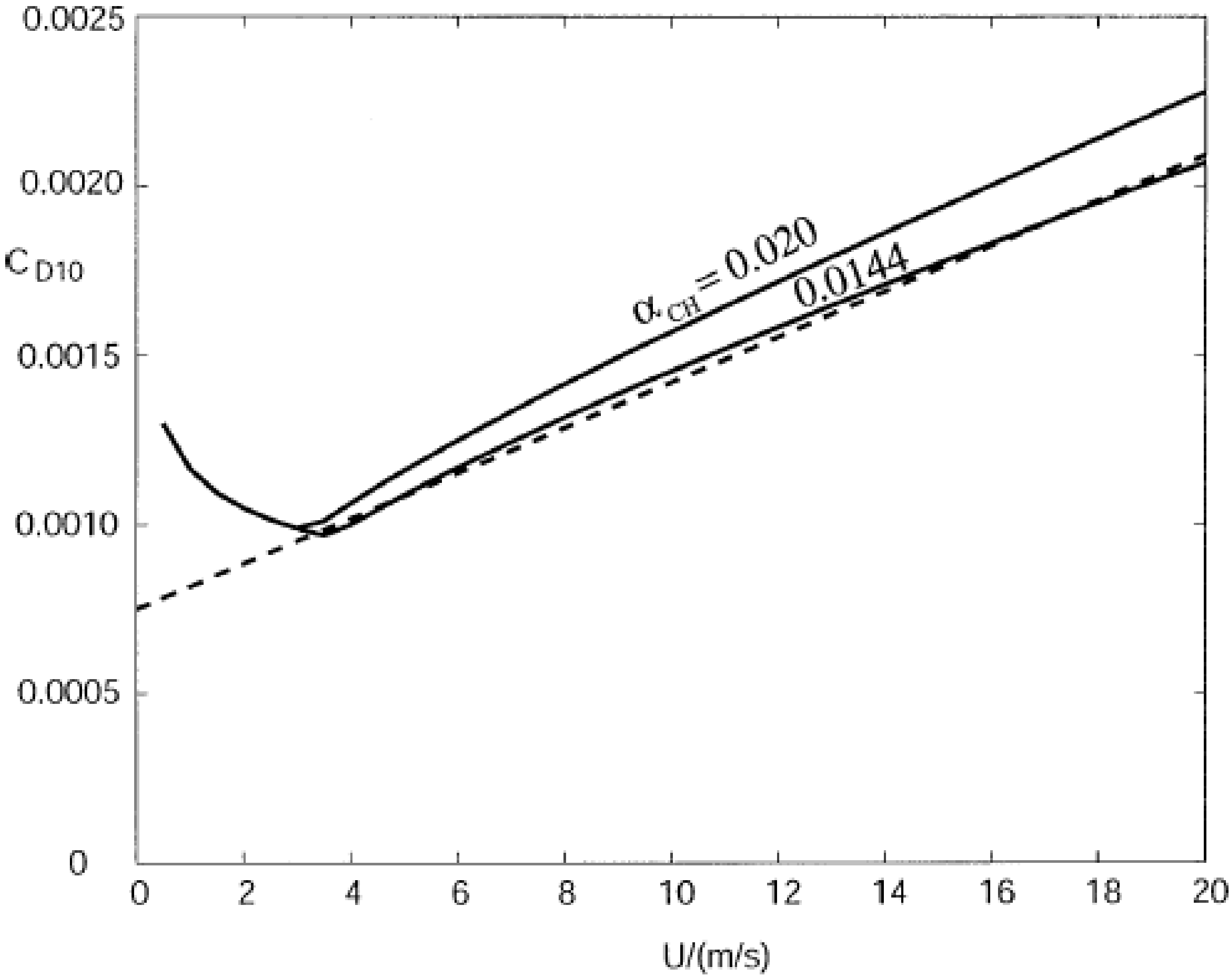
(Large and Pond 1981)

$$D_{rg}=0.75+0.867\sqrt{\left(u_{a10m}{}^2+v_{a10m}{}^2\right)} \qquad \left(\sqrt{\left(u_{a10m}{}^2+v_{a10m}{}^2\right)}\ge 3.7313\right)$$

$$1.5-0.134002\sqrt{\left(u_{a10m}{}^2+v_{a10m}{}^2\right)} \qquad \left(\sqrt{\left(u_{a10m}{}^2+v_{a10m}{}^2\right)}<3.7313\right)$$

(Mellor and Blumberg 1981)

バルク係数



(Mellor and Blumberg 2004)

熱フラックス：

$$K_H \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{Q_s}{\rho_0 C_p}$$

$Q_s =$

(短波放射)+(長波放射)+(潜熱フラックス)+(顕熱フラックス)

潜熱フラックス

$$q_{eq} = L\rho_a \boxed{Ce_{2m}} \sqrt{u_{2m}^2 + v_{2m}^2}(qsat(T_a) - q_a)$$

凝結の潜熱 L，大気密度 ρ_a，海上 2m の風 (u_{2m}, v_{2m})，海上気温 T_a における飽和比湿 $qsat(T_a)$，海上湿度 q_a

顕熱フラックス

$$q_{aq} = \rho_a c_p \boxed{Ch_{2m}} \sqrt{u_{2m}^2 + v_{2m}^2}(T_s^o - Ta)$$

等圧比熱 c_p，大気密度 ρ_a，海上 2m の風 (u_{2m}, v_{2m})，海面水温データ T_s^o，海上気温 Ta

淡水フラックス

$$K_H \left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{z=0} = -W \cdot S_{z=0}$$

信頼に足る降水・蒸発のデータが従来なかったため、

$$K_H \left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{z=0} = \left({dq}\middle/{ds} \right)\left(S_{c\,\mathrm{lim}} - S(k=1)\right)$$

第一層の塩分を気候値塩分に緩和させている。

今後は、蒸発・降水のデータを導入する予定

乱流の取り扱い:「粘性・拡散」項

分子粘性、分子拡散は、無視できる

海洋現象は基本的に乱流であり、用いている時空間解像度
では必ず表現できない流れが存在する

$$u = \overline{u} + u' \quad \overline{u'} = 0$$

$$\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}$$

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial x}\left(-K_M \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)$$

渦粘性係数による粘性・
拡散表現
→ 乱流モデル(第5回)

乱流モデル

直接シミュレーション　(DNS)
渦が摩擦で直接熱になる空間スケール（コルモゴロフマイクロスケール：0.1mm以下）の格子間隔で計算する。
分子粘性のみで計算する。計算可能時間も非常に短い。

ラージエディシミュレーション　(LES)
小規模の渦同士の相互作用が、駆動源の詳細な力学的性質によらず乱流のマクロな散逸率εと、分子粘性のみによって特徴づけられるような空間スケール（コルモゴロフの粘性散逸スケール：数mm程度）の格子間隔で計算する。
比較的簡単なパラメタリゼーションで計算できる。しかし、現実的な海洋の問題を解くにはまだ重すぎる。

通常は、
→乱流二方程式モデル：乱流過程を表現するマクロな値二種類で乱流過程を近似し、渦粘性係数を推定する手法

乱流二方程式モデル：鉛直渦粘性係数

$$K_H = qlS_H \qquad q^2 = \overline{u'^2}$$ 乱流運動エネルギー

$$K_M = qlS_M \qquad l$$ 乱流長さスケール

$$K_q = qlS_q$$

(Mellor and Yamada 1982)

$$\frac{\partial q^2 D}{\partial t} + \frac{\partial U q^2 D}{\partial x} + \frac{\partial V q^2 D}{\partial y} + \frac{\partial \omega q^2}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_q}{D}\frac{\partial q^2}{\partial \sigma}\right] + \frac{2K_M}{D}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2\right] + \frac{2g}{\rho_o} K_H \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma} - \frac{2Dq^3}{B_1 \ell} + F_q$$

$$\frac{\partial q^2 \ell D}{\partial t} + \frac{\partial U q^2 \ell D}{\partial x} + \frac{\partial V q^2 \ell D}{\partial y} + \frac{\partial \omega q^2 \ell}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_q}{D}\frac{\partial q^2 \ell}{\partial \sigma}\right] + E_1 \ell \left(\frac{K_M}{D}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2\right] + E_3 \frac{g}{\rho_o} K_H \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma}\right) - \frac{Dq^3}{B_1}\tilde{W} + F_\ell$$

乱流運動エネルギー方程式

$$\frac{\partial q^2 D}{\partial t} + \frac{\partial U q^2 D}{\partial x} + \frac{\partial V q^2 D}{\partial y} + \frac{\partial \omega q^2}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_q}{D}\frac{\partial q^2}{\partial \sigma}\right]$$

時間変化項　移流項　鉛直拡散項

$$+ \frac{2K_M}{D}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2\right] + \frac{2g}{\rho_o} K_H \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma} - \frac{2Dq^3}{B_1 \ell} + F_q$$

エネルギー生成項　浮力項　散逸項　水平拡散項

明確に物理的な意味がある

乱流長さスケールの方程式

$$\frac{\partial q^2 \ell D}{\partial t} + \frac{\partial U q^2 \ell D}{\partial x} + \frac{\partial V q^2 \ell D}{\partial y} + \frac{\partial \omega q^2 \ell}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_q}{D}\frac{\partial q^2 \ell}{\partial \sigma}\right]$$

$$+ E_1 \ell \left(\frac{K_M}{D}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2\right] + E_3 \frac{g}{\rho_o} K_H \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma}\right) - \frac{D q^3}{B_1}\tilde{W} + F_\ell$$

明確に物理的な意味はない。乱流運動エネルギー方程式からの類推によってモデル化されている。

散逸　$\varepsilon = \dfrac{q^3}{B_1 l}$　を使って定式化するモデルもある：k-εモデル

乱流二方程式モデルの境界条件

$$K_q \frac{\partial q^2}{\partial z} = 0$$

$$K_q \frac{\partial q^2 l}{\partial z} = 0$$

乱流の運動エネルギー源は内部流速の鉛直変化（シアー）と
内部の密度変化のみである

$$\frac{2K_M}{D}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2\right] + \frac{2g}{\rho_o} K_H \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma}$$

中西・新野・古市モデル

Nakanishi and Niino (2009)
Furuichi et al. (2012)

メラーヤマダのモデルにおいて、
乱流の長さスケール l の推定が、乱流運動エネルギー方程式からの類推に基づく恣意的なものであることに着目し、物理的な考察から、以下の診断式を提案

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_S} + \frac{1}{L_T} + \frac{1}{L_B}, \tag{52}$$

$$L_S = \begin{cases} kz/3.7, & \zeta \ge 1 \\ kz(1+2.7\zeta)^{-1}, & 0 \le \zeta < 1 \\ kz(1-100\zeta)^{0.2}, & \zeta < 0, \end{cases} \tag{53}$$

$$L_T = 0.23 \frac{\int_0^\infty qz\,dz}{\int_0^\infty q\,dz}, \tag{54}$$

$$L_B = \begin{cases} q/N, & \partial\Theta_V/\partial z > 0 \text{ and } \zeta \ge 0 \\ [1+5(q_c/L_T N)^{1/2}]q/N, & \partial\Theta_V/\partial z > 0 \text{ and } \zeta < 0 \\ \infty, & \partial\Theta_V/\partial z \le 0, \end{cases} \tag{55}$$

where ζ ($\equiv z/L_M$) is the dimensionless height, L_M ($\equiv -\Theta_0 u_*^3/kg\langle w\theta_V\rangle_g$) the Monin–Obukhov length, u_* the friction velocity, N ($\equiv [(g/\Theta_0)\partial\Theta_V/\partial z]^{1/2}$) the Brunt–Väisälä frequency, and the subscript g denotes the ground surface. q_c ($\equiv [(g/\Theta_0)\langle w\theta_V\rangle_g L_T]^{1/3}$) is a velocity scale defined similarly as the convective velocity w_*, except that the depth z_i of the convective ABL is replaced by L_T.

長さスケールの
時間発展方程式が
不要

→ 今回のsbPOMでは
中西・新野モデルを
使用

乱流モデル：水平方向渦粘性係数

The Smagorinsky Diffusivity

We generally use the Smagorinsky diffusivity for horizontal diffusion although a constant or biharmonic diffusion can and has been used instead. The Smagorinsky formula is,

$$A_M = C\Delta x\Delta y \frac{1}{2}\left|\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T\right|$$

where $\left|\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T\right| = [(\partial u/\partial x)^2 + (\partial v/\partial x + \partial u/\partial y)^2/2 + (\partial v/\partial y)^2]^{1/2}$. Values of C (the HORCON parameter) in the range, 0.10 to 0.20 seem to work well, but, if the grid spacing is small enough (Oey *et al*, 1985a,b), C can be nil. An advantage of the Smagorinsky relation is that C is non-dimensional; related advantages are that A_M decreases as resolution improves and that A_M is small if velocity gradients are small.

(Mellor 2004)