

# CO<sub>2</sub> 排出ミニマムを目指した実高炉内の多相（固気粉）流れの大規模シミュレーション

プロジェクト責任者

松崎 眞六 新日本製鐵株式会社

著 者

湯 晋一 大岳 R & D コンサルタント事務所

梅景 俊彦 九州工業大学 大学院工学研究院 機械知能工学研究系

松崎 眞六\*<sup>1</sup>、門脇 正具\*<sup>1</sup>、国友 和也\*<sup>1</sup>、内藤 誠章\*<sup>1</sup>、廣川 雄一\*<sup>2</sup>、上原 均\*<sup>2</sup>

\* 1 新日本製鐵株式会社 技術開発本部 環境・プロセス研究開発センタ 製鉄研究開発部

\* 2 独立行政法人海洋研究開発機構 計算システム計画・運用部

利用施設名： 独立行政法人海洋研究開発機構 地球シミュレータ

利用期間： 平成 20 年 4 月 1 日～平成 21 年 3 月 31 日

アブストラクト

高炉からの CO<sub>2</sub> 発生量は全産業からの約 15%にもおよび、その削減は地球の温暖化防止にとって重要である。本プロジェクトでは、粒子の離散的な運動を記述する DEM（離散要素法, Distinct Element Method）とガス流れを記述する Navier-Stokes 式を連成して、実高炉内現象を計算するシミュレーションモデルを開発し、高炉における CO<sub>2</sub> 増加の最大の原因である不安定現象を再現し、その防止法を提示する。最終的には多相の運動、反応、伝熱、物質移動を全て連成して計算し、それらの運動等を明らかにして、それに基づき CO<sub>2</sub> 削減のための高効率で安定な操業技術を明らかにすることを考えている。本年度は DEM の運動方程式および Navier-Stokes 式を連成して用い、実高炉（新日鐵大分第 1 高炉）の円周方向は 1/4（90 度分）、高さ方向は全てを含む領域においてコークスと鉄鉱石を層状に配置して、沈降開始とともに 10 本の羽口から速度 250m/s で気流を吹き込み、層状に配置されて沈降する粒子群と相互干渉し形成される実高炉内の不均質な混相流のシミュレーションをおこなった。利用ノード数は 16 ノード（128AP）、粒子数は約 1200 万個で気流の計算の接点数は約 300 万であった。計算結果から燃焼によるコークスの消滅速度を表現する羽口近傍でのコークスの抜き取り速度を大きくすると、安定なレースウェイを短時間で形成することがわかった。これは良好な燃焼がおこっていると、安定なレースウェイが形成されることを示している。逆にいえば、安定なレースウェイが形成されれば良好な燃焼がおこっているであろう。本計算では鉄鉱石は 1200 度ラインで溶け始め、1400 度ラインで完全に溶けるというモデルを用いているが、溶けた鉄鉱石の融液によって生ずる付着力等によって層状のモデル融着帯が形成され、主にその影響によって高炉内に大きな不均質粒状体流れおよび不均質な気体の流れが発生することが分かった。気体は融着帯を避けて、一部は融着帯の内部を通るが、羽口より上部の中心領域および炉壁近くの一部で高速度領域を形成し、それが種々の不均質流れの原因となっている。粒子は壁近傍で速度は小さく、そこに高充填率の領域が形成され、それが原因となり棚吊現象がおこる可能性がある。また羽口間の流れの不均質な相互影響が

不安定現象の原因となっている。実高炉内のシミュレーションから得られたこれらの不安定現象の原因を出来るだけ削減することによってより高効率の高炉操業法を提案することが可能である。それによって CO<sub>2</sub> 発生量の減少に寄与することができ、広く我が国の社会・経済の発展に貢献することが可能であると考えられる。

キーワード： 実高炉、DEM、Navier Stokes 式、粒子流れ、不安定流れ、CO<sub>2</sub> 削減

## 1. はじめに

CO<sub>2</sub> を削減するためにはより高効率で変動のない安定な高炉操業技術の開発が必要であるが、そのためには第一に実高炉全体の気流、コークス、鉄鉱石および鉄鉱石が部分的に溶けて形成する融着帯の運動を明らかにする必要がある。

高炉内部は千数百度という高温でかつ気流と高濃度の粒状体および鉄鉱石の溶融体が複雑に運動し、堆積しているため、内部状態の正確な測定は現在でも不可能に近い。したがって、高炉の内部の状態は未知の部分が多く、それらを明らかにすれば高効率操業を阻害する不安定現象の原因を突きとめることが出来、その防止策を考えることにより高い効率でかつ安定に操業できる技術の開発が可能となるだろう。また京都議定書には大気中の CO<sub>2</sub> の増加による地球温暖化現象が進行し、地球環境の危機的状態の到来が示されており、その京都議定書における CO<sub>2</sub> 削減の約束期間が昨年からはスタートした。わが国の全高炉からの CO<sub>2</sub> 発生量は全産業の約 15% にも及ぶ。高炉の高効率で安定な操業技術の開発は銑鉄の製造という観点だけでなく、地球の温暖化防止というグローバルな課題にも重要な役割を担っている。

高炉の内部の状態を明らかにするためには、高炉内部での測定、実験が困難であるため数値シミュレーションが最適である。しかし高炉は高さが約 30 m と大規模大型装置であり、炉内には極めて多数の粒子があるため、通常のコンピューターでは実高炉の数百分の 1 の領域しか計算できない。そこで世界第一級のメモリ容量と演算スピードをもつ地球シミュレータを用いて実高炉内の運動を計算し、内部の状態を明らかにして、不安定現象の原因を突きとめ、上述の高効率で安定な操業方法を明らかにし、排出 CO<sub>2</sub> の削減に寄与することを目指した。

本年度は DEM の運動方程式および Navier-Stokes 式を連成して用い、実高炉(新日鐵大分第 1 高炉)の円周方向は 1/4 (90 度分)、高さ方向は全てを含む領域においてコークスと鉄鉱石を層状に配置して、沈降開始とともに 10 本の羽口から速度 250m/s で気流を吹き込み、層状に配置されて沈降する粒子群と相互干渉し形成される実高炉内の不均質な混相流のシミュレーションをおこなった。利用ノード数は 16 ノード、気流計算の接点数は約 300 万、計算粒子数は約 1200 万個であった。

## 2. 実高炉内のコークス、鉄鉱石および気流の計算方法

コークス粒子の運動の基礎式は、直交座標系における並進および回転に関する Lagrangian 型運動方程式で、それぞれ次式で表される。

$$m_p \frac{d(\mathbf{U}_{pi})}{dT} = \sum_j (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{D}_{ij}) + \mathbf{F}_{Di} + \mathbf{F}_{Li} + \mathbf{F}_{gi} \quad (1)$$

$$I_p \frac{d(\boldsymbol{\Omega}_{pi})}{dT} = \sum_j (\mathbf{M}_{ij} + \mathbf{M}_{Dij}) + \mathbf{M}_{Fi} \quad (2)$$

Eqs. (1)、(2)の右辺第1項は、それぞれ着目粒子と直接接触する全粒子から作用する接触力および接触力モーメントの総和で、DEM<sup>1,2)</sup>を用いて計算した。Eq. (1)の $\mathbf{F}_{Di}$ 、 $\mathbf{F}_{Li}$ はそれぞれ粒子に作用する抗力と揚力で、その反作用力が気流に作用する $\mathbf{St}$ および $\mathbf{St}_L$ で下記の気流のところで示しているEq. (5)で求まる。ただし $\mathbf{St}_L$ の式はここでは省略している。これらの項で粒子の運動と気流の運動がリンクされ、それらが連成された運動が求まる。Eq. (1)の $\mathbf{F}_{gi}$ は粒子に作用する重力、Eq. (2)の $\mathbf{M}_{Fi}$ は粒子が流体から受ける摩擦トルクである。なお本計算では流体による摩擦トルク $\mathbf{M}_{Fi}$ をTakagi<sup>3)</sup>の式に基づいて計算した。

気流の運動の基礎式は、空隙率及び粒子との相互作用を考慮した無次元化されたNavier-Stokes式と連続の式で、それぞれ次式で表される。

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\varepsilon \nabla p + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left[ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] - \mathbf{St} - \mathbf{St}_L \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

式中の $\mathbf{St}$ および $\mathbf{St}_L$ はそれぞれ気流・粒子間で作用する抗力と揚力で気流と粒子の相互干渉項を表わす。前述したようにこれらがEq. (1)の $\mathbf{F}_{Di}$ と $\mathbf{F}_{Li}$ に相当し、気流と粒子が連成された運動が求まる。

気流・粒子間で作用する抗力による相互干渉項には、粒子周りレイノルズ数が1000以下の場合にはShiller and Naumannの実験式<sup>4)</sup>に基づく次式を用いた。

$$\mathbf{St} = \frac{3\pi\mu D_p ND \left(1 + 0.15 Re_p^{0.687}\right)}{U_0 \rho} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \xi(\varepsilon) \quad (0 \leq Re_p \leq 1000) \quad (5)$$

また粒子周りレイノルズ数が1000より大きい場合および揚力による干渉項はYuu et al.<sup>5)</sup>と同じ式をもちいているのでここでは省略した。

数値計算ではNavier-Stokes式のダイバージェンスを取って得られる圧力に関するポアソンの式を緩和法で計算した。

DEMとNavier-Stokes式の計算条件を表1に示す。

### 3. 実高炉内の計算結果

実高炉（新日鐵大分第1高炉）の周方向1/4（90度分）の領域においてコークスと鉄鉱石を層状に配置して沈降させ、同時に羽口から速度250m/sで気流を吹き込み、気流の運動を表わすNavier-Stokes式と粒子の運動を表わすDEM方程式を連成して計算した。以下に計算結果を示す。

表1 計算条件

計算領域 (炉体) 寸法	半径: $R_0 = 7,350 \text{ mm}$ (羽口部), $R_l = 8,379 \text{ mm}$ (ベリー部) 円周方向: $90^\circ$ , 高さ: $H = 27,840 \text{ mm}$ (炉頂まで)
計算時間ステップ	$\Delta t = 3.0 \times 10^{-5} \text{ s} \sim 2.5 \times 10^{-4} \text{ s}$
気流計算セル数 (内点)	$57 (r \text{ 方向}) \times 140 (\theta \text{ 方向}) \times 348 (z \text{ 方向})$
気流計算セル幅 (有次元値)	$\Delta r = 147.0 \text{ mm}$ , $\Delta \theta = 1.122 \times 10^{-2} \text{ rad}$ , $\Delta z = 80.0 \text{ mm}$
羽口 (ノズル) 気流噴出速度	$U_0 = 250 \text{ m/s} \sim 340 \text{ m/s}$
計算粒子径	炉壁および羽口を構成する粒子: $50.0 \text{ mm}$ (均一) コークス粒子: 平均径 $57 \text{ mm}$ , 鉱石粒子: 平均径 $45 \text{ mm}$ コークス粒子と鉱石粒子は粒径分布と粒度偏析を考慮。
計算粒子数	炉壁および羽口を構成する固定粒子の数: 約 23.5 万個 重力沈降開始時の初期配置粒子数: コークス粒子: 約 257.8 万個, 鉱石粒子: 約 207.8 万個 荷下り時に炉頂部から 1 チャージ毎に供給する粒子数: コークス粒子: 約 7.7 万個, 鉱石粒子: 約 20.8 万個 最大計算粒子数: 合計 1200 万個
計算粒子の見掛け密度	コークス粒子: $1050 \text{ kg/m}^3$ , 鉱石粒子: $3260 \text{ kg/m}^3$
計算粒子のその他の物性	縦弾性係数: $E = 1.0 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ , ポアソン比: $\nu = 0.25$ , 摩擦係数 $\mu = 0.45$

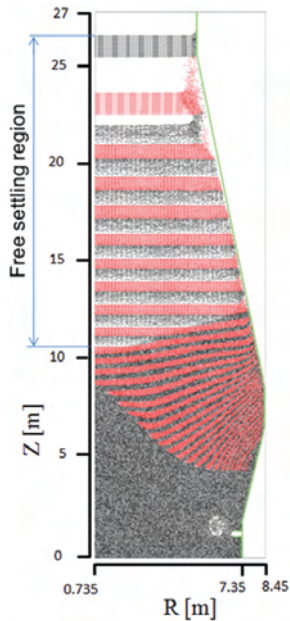


図1(a) 実高炉と同一寸法の高炉における  
 $T=2.37\text{s}$  の粒子位置図 [ 右側鉛直 ( $R-Z$ ) 断面図 ]

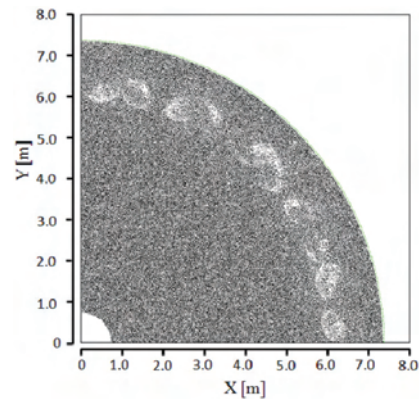


図1(b) 実高炉と同一寸法の高炉における  
 $T=2.37\text{s}$  の粒子位置図 [ $Z=1.35\text{m} \sim 1.65\text{m}$  の水平  
( $R-\theta$ ) 断面図]

図1にコークスと鉄鉱石が交互に層状に堆積され、沈降と同時に羽口から高速気流を吹き込んだ時の2.37s後の粒子位置図、すなわち図1(a)に $R-Z$ 断面、図1(b)に $R-\theta$ 断面の計算結果を示す。図1(a)において、羽口から吹き込んだ高速気流の影響が層状に堆積して沈降してきたコークス粒



子および鉄鉱石粒子の運動に十分及んで充填層が形成されているのは、高速気流の影響で層状粒子層が変形している領域および底部近くの黒く見える領域、すなわち高炉中心で  $Z=10\text{m}$ 、高炉壁近くで  $Z=12\text{m}$  までの領域で、それより上部ではまだ自由沈降が支配的な領域である。前述したように鉄鉱石は  $1200$  度ラインから溶け始め、 $1400$  度ラインで完全に溶けることを計算にモデルとして取り入れているので、充填層が形成された領域では  $1400$  度ラインより下方では鉄鉱石は存在せず、それより上部では溶けた鉄鉱石による付着力等の影響で形成される融着帯、そこでは融液等の影響によって高充填率領域が形成され気流は通りにくい、の影響や炉壁形状の影響と気流の相互干渉によって、規則的な層状に供給され堆積したコークスや鉄鉱石の層はゆがめられ、かつ層が細く圧縮され、特にレースウェイの上方の炉壁近くで著しく層が細く圧縮されて、高充填領域の形成を示している。また同図より高炉下部の羽口前方ではレースウェイが形成されているのがわかる。充填層が未だ形成されていない高炉上部の炉壁近くでは気流の吹き抜けおよび新しく供給した粒子層の飛散が起っているが、沈降が終了して充填層が上部まで形成されれば、この気流の吹き抜けは減少するだろう。図 1 (b) は羽口を中心域、 $Z=1.35\text{m} \sim 1.65\text{m}$ 、の  $R-\theta$  断面の粒子位置図の計算結果を示している。10 本の羽口から噴出した気流によって形成したレースウェイが複雑に相互干渉しているようすが分かる。この干渉したレースウェイは時間的に大きく変化し、何本かのレースウェイが消滅したような時間も存在する。

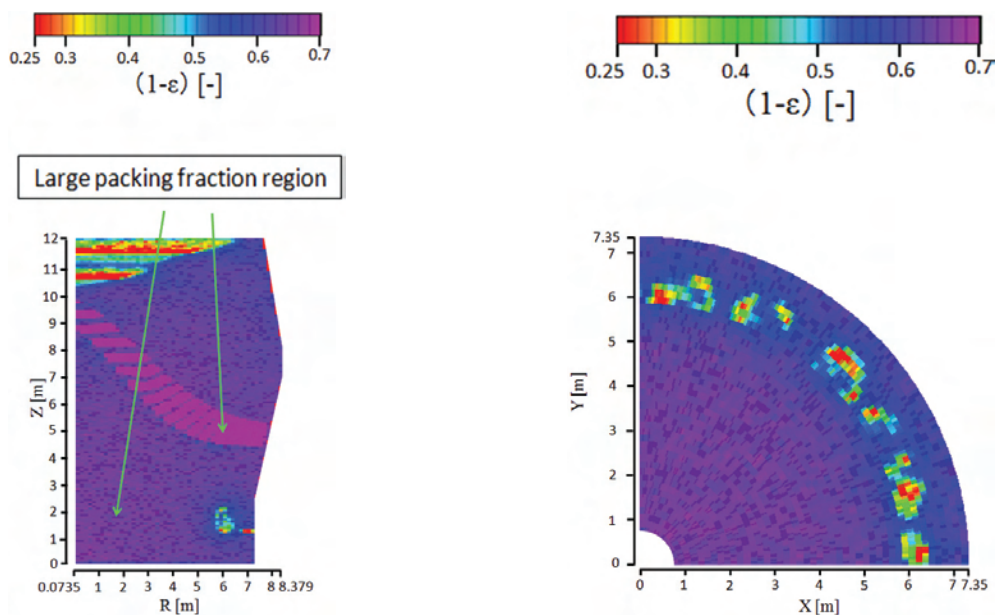


図 2(a) 実高炉と同一寸法の高炉における  $T=2.37\text{s}$  の充填率コンタ [右側鉛直 ( $R-Z$ ) 断面図]

図 2(b) 実高炉と同一寸法の高炉における  $T=2.37\text{s}$  の充填率コンタ [ $Z=1.35\text{m} \sim 1.65\text{m}$  の水平 ( $R-\theta$ ) 断面図]

図 2 にコークスと鉄鉱石を含めた粒子充填率のカラーコンタの計算結果を示す。図の中央に右下がりの  $1200$  度ラインと  $1400$  度ラインが存在し、それに挟まれた領域でまだ溶けていない鉄鉱石が存在する領域が本計算の結果として現れる融着帯群である。融着帯では鉄鉱石の体積の  $50\%$  が溶けて融液となるので、この溶けた液体は空隙に流れ込むと考えられ、それによって鉄鉱石のまわりに空隙が形

成され、そこに粒子群（コークスと鉄鉱石）が入ってくるので、図のカラーコンタから明らかなように高充填率（すなわち気流の体積の少ない低空隙率）領域が形成される。高充填率の領域には気流は流れ込みにくい、完全に遮断されていない(図4参照)。融着帯上部、下部および炉下部の中心部(これらの領域での融液の存在は考慮していない)にも高充填率領域が形成されている。これも気流が融着帯をさけて通ることと炉下部へは気流は流れにくいことが原因している。コークスの燃焼残渣等からなる微粉の影響と炉下部に形成された高充填率領域がこの領域にデッドマンを形成していくと考えられる。図3にコークスの速度ベクトル図と上下方向速度のカラーコンタの計算結果を示す。高炉壁近くの融着帯の上部、融着帯が存在する部分、融着帯の下部および炉底部でコークスの速度は非常に小さくなっている。炉の円錐部やボッシュ部の炉壁近くでのコークスの低流速による停留はそこでの棚吊り現象を誘発する恐れがある。また同図からわかるように、融着帯を境にして、コークスの流れは大きく異なっている。このように融着帯の存在が高炉内の流れを不均質度の高い流れとして、それが高炉の高効率操業を阻んでいるように見受けられる。

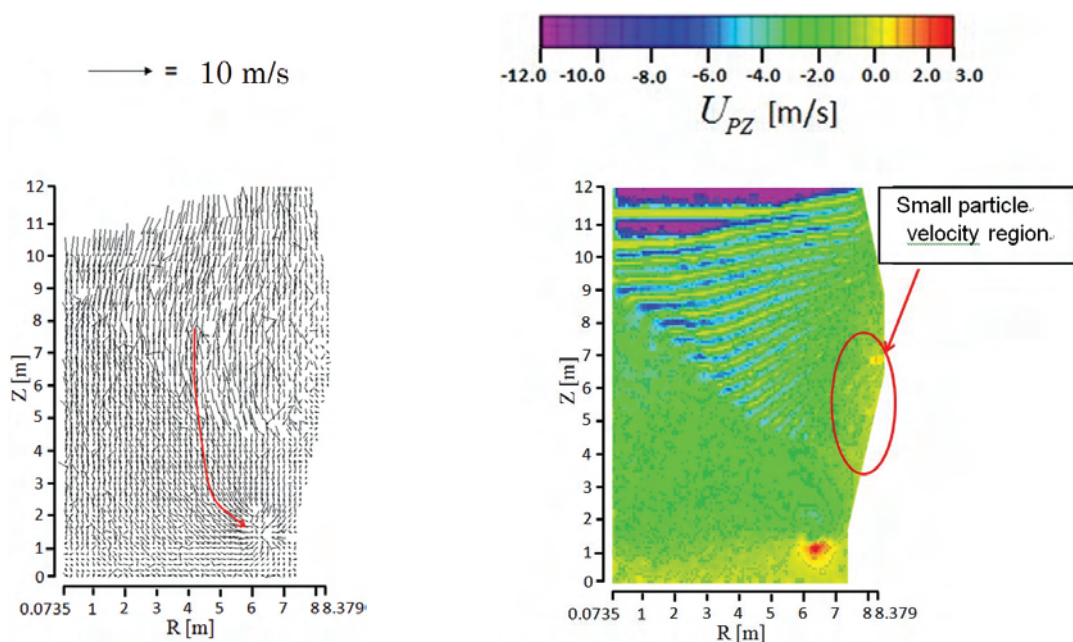


図 3(a) 実高炉と同一寸法の高炉における  $T=2.37s$  の粒子速度ベクトル図 [ 右側鉛直 (R-Z) 断面図 ]

図 3(b) 実高炉と同一寸法の高炉における  $T=2.37s$  の Z (上下) 方向粒子速度コンタ [ 右側鉛直 (R-Z) 断面図 ]

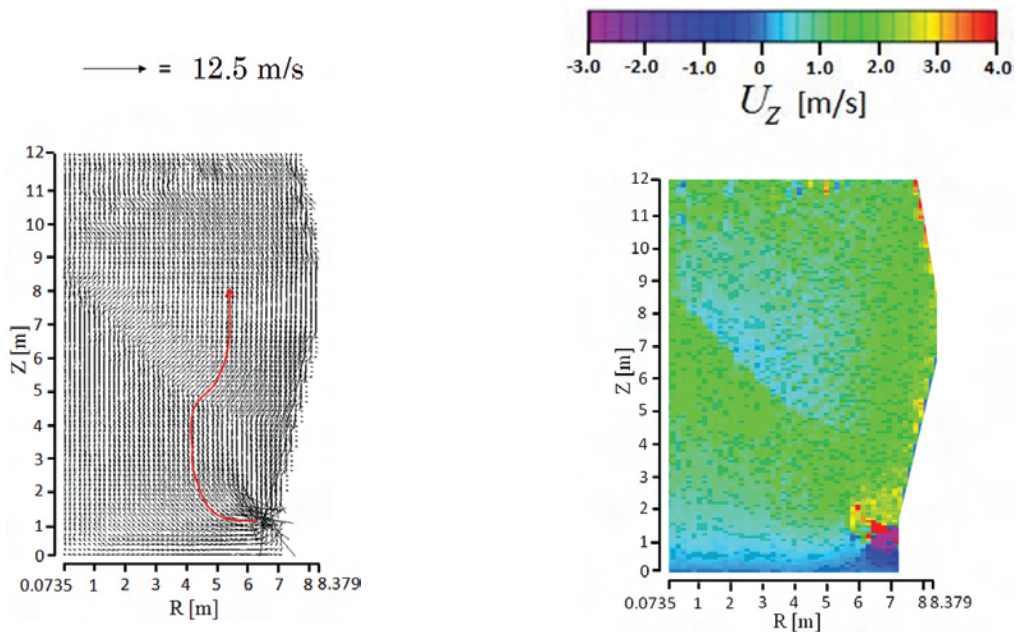


図 4(a) 実高炉と同一寸法の高炉における  
 $T=2.37\text{s}$  の気流速度ベクトル図 [ 右側鉛直 (R-Z)  
断面図 ]

図 4(b) 実高炉と同一寸法の高炉における  
 $T=2.37\text{s}$  の Z (上下) 方向気流速度コンタ [ 右側  
鉛直 (R-Z) 断面図 ]

図 4 に気流の速度ベクトル図と上下方向速度コンタの計算結果を示す。融着帯の存在によって気流も大きな不均質流れを形成する。気流の流れは炉壁近くの局所的な部分と炉心近くに速い流れの領域を形成する。炉壁の近傍での上向きの速い流れは、現実には炉壁における熱風の吹き抜けを起こす可能性があり、危険な流れである。融着帯ではその高充填率のため気流は通りにくく、低流速となるので、大部分の空気は壁近くや炉中心部を流れることになる。以上のことから融着帯形成の制御が高炉内の流れの均質化に重要な課題であることが考えられる。

#### 4. 得られた結論と社会・経済の発展への貢献およびその見通し

本計算では鉄鉱石は 1200 度ラインで溶け始め、1400 度ラインで完全に溶けるというモデルを用いているが、溶けた鉄鉱石の融液やそれによって生ずる付着力等によってモデル融着帯が形成され、主にその影響で高炉内に大きな不均質粒状体流れおよび不均質な気体の流れが発生することを提示した。気体は融着帯を避けて羽口より上部の中心領域で速度は速く、高空隙率の領域が形成され、それが種々の不均質流れの原因となっている。粒子は壁近傍で速度は小さく、そこに高充填率の領域が形成され、それにより棚吊現象がおこる可能性がある。また羽口間の流れの不均質な相互影響も不安定現象の原因となっている。得られた結果は現在最も現実の高炉に近いデータと考えられるが、これらを基にし得られた不安定現象の原因を出来るだけ低減することによってより高効率の高炉操業法を提案することができる。それによって  $\text{CO}_2$  発生量の減少に寄与することができ、広く我が国の社会・経済の発展に貢献することが可能であると考えられる。2007 年度の我が国における  $\text{CO}_2$  ガス排出量上位 5 社の内 4 社が製鉄会社である。このような多量の  $\text{CO}_2$  を発生している企業が積極的に  $\text{CO}_2$  発生量の削減に取り組むことにより  $\text{CO}_2$  発生量の削減を社会全体に波及させる効果も考えられる。

このようにして得られた研究成果は新日鐵だけでなく、世界の全ての高炉に適用できる技術であり、日本だけでも2～3%のCO<sub>2</sub>発生量の削減が期待できる。また上記シミュレーション法は広く混相流に適用でき、他分野、他技術への展開の可能性が高い。

今後はコークスの燃焼等によって発生する粉の運動等を Smoothed Particle Method (SPH) によって表現し、粉が粒子や気流の運動にあたる影響をシミュレーションする。これらの結果を踏まえて、将来は実高炉内の反応と伝熱をモデル化し、反応と伝熱を考慮した全ての固気液粉を SPH 法によって連成し計算することを考えている。

## 謝 辞

本研究に関して、独立行政法人海洋研究開発機構 計算システム計画・運用部の平野 哲 部長、北脇 重宗 調査役、新宮 哲 産業利用推進グループリーダーから貴重なご指導、ご助言をいただいた。ここに記して感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) P. A. Cundall and O. D. L. Strack, “A discrete numerical model for granular assemblies”, *Geotechnique*, Vol. 29, pp. 47-65, 1979.
- 2) S. Yuu, T. Umekage and Y. Johno, “Numerical simulation of air and particle motions in bubbling fluidized bed”, *Powder Technol.*, Vol. 110, pp. 158-168, 2000.
- 3) H. Takagi, “Viscous flow induced by rotation of a sphere”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 42, 319-325, 1977.
- 4) L. Schiller and A. Naumann, “Ber die Grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung”, *Z. Ver. Dtsch. Ing.*, Vol. 77, 318-321, 1933.
- 5) S. Yuu, T. Umekage and T. Miyahara, “Prediction of stable and unstable flows in blast furnace raceway using numerical simulation methods for gas and particles”, *ISIJ International*, Vol. 45, 1406-1415, 2005.

## 記号表

- $C_L$  : 揚力係数 [-]  
 $D$  : 羽口部分の高炉半径 [m]  
 $D_{ij}$  : 粒子  $i, j$  の接触点での減衰力ベクトル [N]  
 $D_p$  : 粒子径 [mm]  
 $F_{Di}$  : 粒子  $i$  に作用する気流からの抗力ベクトル [N]  
 $F_{gi}$  : 粒子  $i$  に作用する重力ベクトル [N]  
 $F_{ij}$  : 粒子  $i, j$  の接触点での接触力ベクトル [N]  
 $F_{Li}$  : 粒子  $i$  に作用する気流からの揚力ベクトル [N]  
 $I_p$  : 粒子の慣性モーメント [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]  
 $M_{Dij}$  : 粒子  $i, j$  の接触点での減衰力モーメントベクトル [ $\text{N} \cdot \text{m}$ ]  
 $M_{Fi}$  : 粒子  $i$  に作用する気流からの摩擦トルクベクトル [ $\text{N} \cdot \text{m}$ ]  
 $M_{ij}$  : 粒子  $i, j$  の接触点での接触力モーメントベクトル [ $\text{N} \cdot \text{m}$ ]



$m_p$  : 粒子質量 [kg]  
 $N$  : 単位体積あたりの粒子数 [ $\text{m}^{-3}$ ]  
 $p$  : 無次元静圧 [-]  
 $Re$  : レイノルズ数 [-]  
 $Re_p$  : 粒子レイノルズ数 [-]  
 $\mathbf{St}$  : 気流からの抗力による無次元相互干渉項ベクトル [-]  
 $\mathbf{St}_L$  : 気流からの揚力による無次元相互干渉項ベクトル [-]  
 $T$  : 時間 [s]  
 $t$  : 無次元時間 [-]  
 $U_p$  : 粒子速度 [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]  
 $U_\theta$  : 羽口気流噴出流速 [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]  
 $U_r, U_\theta, U_z$  : 気流速度 [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]  
 $U_{pr}, U_{p\theta}, U_{pz}$  : 粒子速度 [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]  
 $\mathbf{u}$  : 無次元気流速度ベクトル [-]  
 $\mathbf{u}_p$  : 無次元粒子速度ベクトル [-]  
 $u_r, u_\theta, u_z$  : 無次元流速 [-]  
 $\varepsilon$  : 空隙率 [-]  
 $\mu$  : 気流の粘性係数 [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ]  
 $\xi(\varepsilon)$  : 粒子集団系における抗力補正関数 [-]  
 $\rho$  : 気流密度 [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]  
 $\Omega_p$  : 粒子の角速度 [ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ]  
 $\Omega^*$  : 粒子の表面回転速度／並進速度の比 [-]  
 $\omega_p$  : 粒子の無次元回転角速度ベクトル [-]  
 (添字)  
 $i, j$  : 粒子番号  
 $p$  : 粒子  
 $r, \theta, z$  : 円柱座標系の各方向成分