

# 三次元有限要素法による 回転機の高速度高精度数値解析技術の開発

## プロジェクト責任者

中村 雅憲 東洋電機製造株式会社

## 著者

中村 雅憲<sup>\*1</sup>、河瀬 順洋<sup>\*2</sup>、山口 忠<sup>\*2</sup>、中野 智仁<sup>\*2</sup>、柴山 義康<sup>\*2</sup>、西川 憲明<sup>\*3</sup>、上原 均<sup>\*3</sup>

\* 1 東洋電機製造株式会社

\* 2 岐阜大学

\* 3 独立行政法人海洋研究開発機構

利用施設： 独立行政法人海洋研究開発機構 地球シミュレータ

利用期間： 平成 22 年 4 月 1 日～平成 23 年 3 月 31 日

## アブストラクト

本プロジェクトでは、地球シミュレータ上で動作する、三次元有限要素法による並列磁界解析プログラムを開発し、高速高精度な回転機の大規模磁界シミュレーションを実現することを目的としている。今年度は、これまでに開発したプログラムを拡張し、(i) 渦電流問題を高速に解くことができる手法 ( $A-\phi$  法) の実装と (ii) 磁束分布の周期性により解析領域を削減することができる周期境界条件の導入を行い、回転機の磁界解析を通してその有用性を明らかにした。

キーワード： 回転機、磁界解析、辺要素有限要素法、領域分割法、 $A-\phi$  法

## 1. はじめに

国内の消費電力のうち、50%以上が回転機によって消費されていると言われている。よって、回転機の効率向上は環境問題において避けることのできない課題のひとつであると言える。

高効率な回転機の開発設計のためには、回転機本体だけでなく、ケースやその他の構造物等、細部まで精密にモデル化する必要がある、膨大な主記憶容量を要する。また、インバータ等による電圧波形や電流波形を正確に考慮するためには、時間軸方向の分解能を高くする必要があり、膨大な計算時間を要する。そのため、回転機の磁界解析の大規模化・高速化技術の開発が強く望まれている。

本プロジェクトでは前年度までに、 $A$  法と呼ばれる磁気ベクトルポテンシャルを未知とする手法を領域分割法によって並列化するとともに、地球シミュレータ上での大規模な回転機のシミュレーションを通して、回転子の軸ずれ（偏心）が、回転機の諸特性に及ぼす影響について明らかにした<sup>1)</sup>。辺要素を用いた三次元有限要素法による磁界解析では、一般に、渦電流問題を高速に解くために、磁気ベクトルポテンシャル  $A$  のみでなく電気スカラーポテンシャル  $\phi$  を未知数とした定式化 ( $A-\phi$  法) が行われ

ている。また、回転機の磁界解析では、周期的に現れる電磁界の性質を利用し、解析領域を削減する手法（周期境界条件の適用）が用いられている。そこで、今年度は、これまでに開発した並列計算プログラムを拡張し、 $A-\phi$ 法の実装と周期境界条件の導入を行った。

## 2. 解析手法

### 2.1 基礎方程式

永久磁石および渦電流を考慮した磁界の基礎方程式は、マクスウェルの電磁方程式より磁気ベクトルポテンシャル  $A$  と電気スカラポテンシャル  $\phi$  を用いて次式で表される。

$$\text{rot}(\nu \text{rot } A) = J_0 + J_e + \nu_0 \text{rot } M \quad (1)$$

$$J_e = -\sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad } \phi \right) \quad (2)$$

$$\text{div } J_e = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\nu$  は磁気抵抗率、 $J_0$  は強制電流密度、 $J_e$  は渦電流密度、 $\nu_0$  は真空の磁気抵抗率、 $M$  は永久磁石中の磁化、 $\sigma$  は導電率である。なお、辺要素有限要素法では、磁気ベクトルポテンシャル  $A$  は要素の辺上で、電気スカラポテンシャル  $\phi$  は要素の節点上で、それぞれ定義される。

### 2.2 $A-\phi$ 法のための並列計算手法<sup>2)</sup>

導体に流れる渦電流を考慮した磁界解析の手法には、要素の辺上で定義される磁気ベクトルポテンシャル  $A$  のみを未知とする  $A$  法と、それに加えて要素の節点上で定義される電気スカラポテンシャル  $\phi$  を連立させて解く  $A-\phi$  法とがある。一般に、辺要素を用いた三次元有限要素法では、 $A-\phi$ 法を用いた解析の方が  $A$  法より高速に解を求められることが知られている。しかしながら、 $A-\phi$ 法は未知数が辺と節点の両方で定義されるため、並列化が容易でなく、オーバーラップ要素を用いるタイプの領域分割法によって並列化された例がこれまでに報告されていなかった。そこで今年度は、 $A-\phi$ 法のための領域分割法を新たに開発した。以下にその詳細を記す。

図1に  $A-\phi$ 法のための領域分割の例を示す。ここでは、マトリクス生成時に通信を発生させないように、それぞれの小領域にオーバーラップ要素を設けている。小領域が有する辺および節点は、通信の観点から次の3通りに分類される。

- 外辺・外点：領域分割後、オーバーラップ要素に含まれる辺・節点として、その小領域に加えられた辺・節点。
- 境界辺・境界点：オーバーラップ要素に含まれる辺・節点のうち、外辺・外点以外の辺・節点。
- 内辺・内点：外辺・外点以外の辺・節点（境界辺・境界点も含む）。

ある小領域の外辺・外点は、その小領域に隣接する小領域の境界辺・境界点となる。そのため、外辺・外点のデータは、隣接する小領域の境界辺・境界点から通信によって得ることができ、また、境界辺・境界点のデータは、隣接する小領域の外辺・外点に対して通信によって送られる。このように、オーバーラップ要素と外辺・境界辺および外点・境界点の関係をを用いることで、すべての辺および節点のデータを過不足なく取り扱うことができる。

$A$ - $\phi$ 法による非線形渦電流解析では、 $i$ 番目の小領域の解くべきマトリクスは次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G^{(i)}}{\partial A^{(i)}} & \frac{\partial G^{(i)}}{\partial \phi^{(i)}} \\ \frac{\partial G_d^{(i)}}{\partial A^{(i)}} & \frac{\partial G_d^{(i)}}{\partial \phi^{(i)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta A^{(i)} \\ \delta \phi^{(i)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} G^{(i)} \\ G_d^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $G^{(i)}$  および  $G_d^{(i)}$  は式 (1) ~ (3) からガラーキン法によって得られる残差である。

図2に、2領域に分割した場合の式(4)のマトリクスの例を示す。 $i$ 番目の小領域を取り扱う計算機は、上付き添え字が $i$ のデータのみを格納するだけでよい。それぞれの小領域を計算するために、CG (Conjugate Gradient) 法の反復ごとに外辺および外点のデータを隣接する小領域から通信によって取得する。

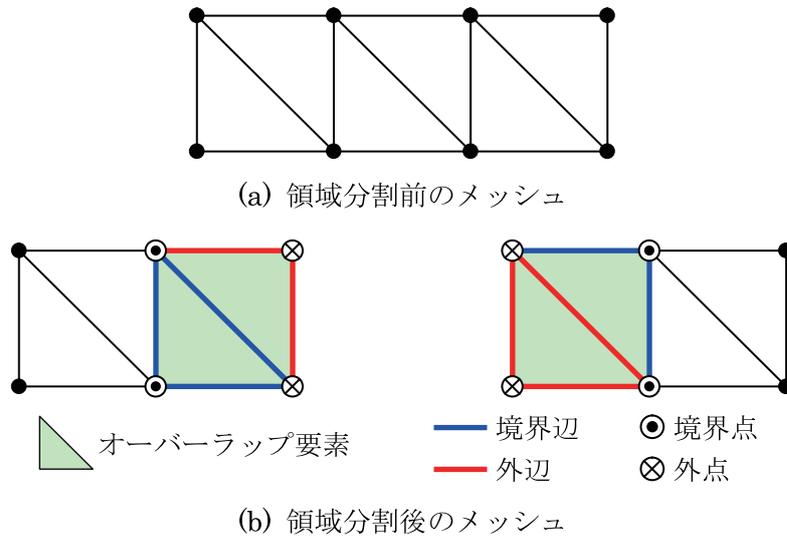


図1  $A$ - $\phi$ 法のための領域分割

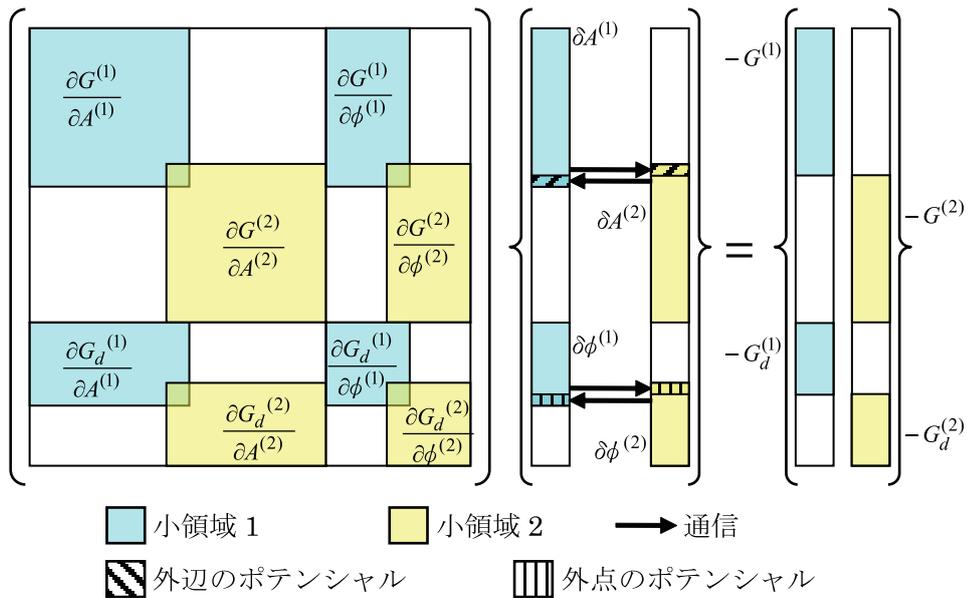


図2 領域分割されたマトリクス

## 2.3 周期境界条件を用いる場合の並列計算

回転機など、磁束分布が周期的に現れるような構造を有する対象を解析する場合、周期境界条件を用いることで解析領域を減らすことができる。

領域分割法に基づく並列計算において周期境界条件を用いる場合、周期境界上の対応する辺が異なる小領域に属していると、対応する辺のポテンシャルを得るための通信が線形ソルバの反復ごとに必要となる。この通信を避けるためには、周期境界上の対応する辺が、同じ小領域に属するように領域分割を行えばよい。図3に周期境界を考慮して領域を2分割した回転機の三次元分割図の例を示す。図3では周期境界上の対応する辺はすべて小領域1に含まれるため、線形ソルバ内で周期境界上のポテンシャルの通信を行う必要がない。このような領域分割は、領域分割ツール METIS で必要となる辺の接続情報を作成する際に、周期境界上の対応する辺を同一の辺とみなすことで実現される。

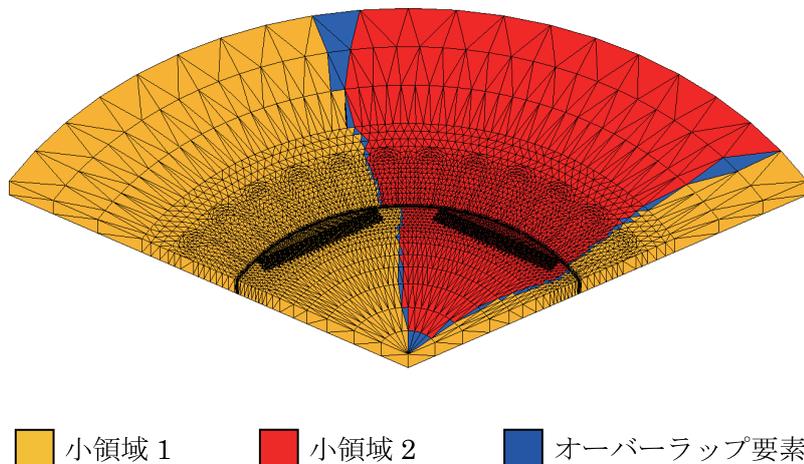


図3 周期境界を考慮した領域分割

## 3. 地球シミュレータを用いた回転機の磁界解析

本章では、 $A-\phi$ 法を用いた渦電流解析と周期境界条件を考慮した磁界解析を通して、提案手法の妥当性・有用性を検討する。

### 3.1 $A-\phi$ 法による渦電流解析

並列化した $A-\phi$ 法による解析精度と計算時間を検証するための解析モデルとして、図4に示すIPMモータを用いた。本モデルの回転子はx軸正方向に $0.5^\circ$ 傾いた状態で回転するものと仮定した(斜体偏芯)。解析領域は1/1領域とし、正弦波交流電流を入力とした。要素数は5,788,908である。計算にはES2を8ノード(64CPU)を使用した。また、本解析では永久磁石中の渦電流を考慮している。永久磁石はz軸方向に8つに分割されており、それぞれの磁石間は絶縁されている。

図5に永久磁石中の渦電流密度分布を示す(図4における破線に囲まれた部分)。 $A$ 法で計算した結果と $A-\phi$ 法で計算した結果はよく一致しており、 $A-\phi$ 法による並列化された渦電流解析の妥当性が確認できた。

表1に1ステップ目の解析の計算時間を示す。参考のためにCG法の反復回数も同表に併せて示す。比較のために、同表に $A$ 法での結果も併せて示す。 $A-\phi$ 法を用いた並列計算は $A$ 法を用いた場合よりも約1.5倍高速であり、 $A-\phi$ 法による並列化された渦電流解析の有用性が確認できた。

表2にA- $\phi$ 法による並列化された渦電流解析の台数効果と並列化効率を示す。なお、1CPUでの計算は非常に時間がかかるため、64CPUと32CPUの計算時間から台数効果および並列化効率を推定した。表2より、本計算では64CPUを用いて41.6倍の台数効果と65.0%の並列化効率を達成していることがわかる。

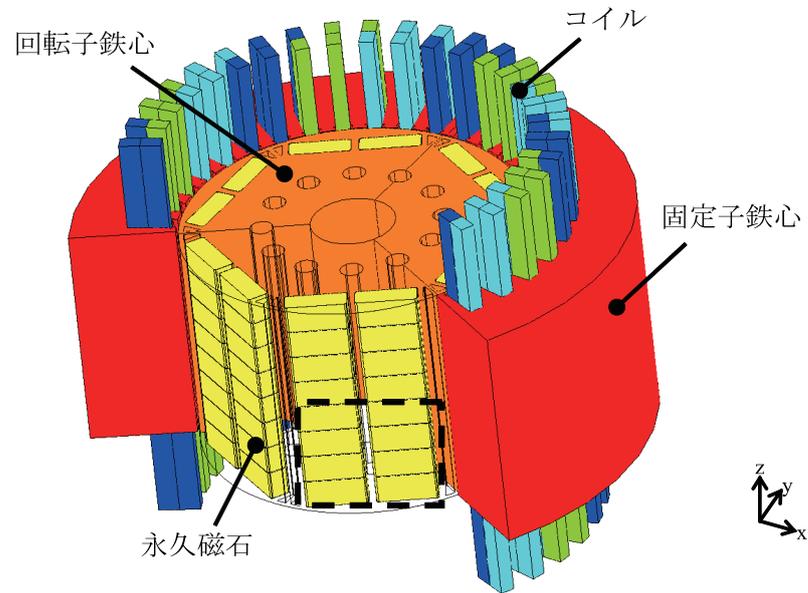


図4 解析モデル

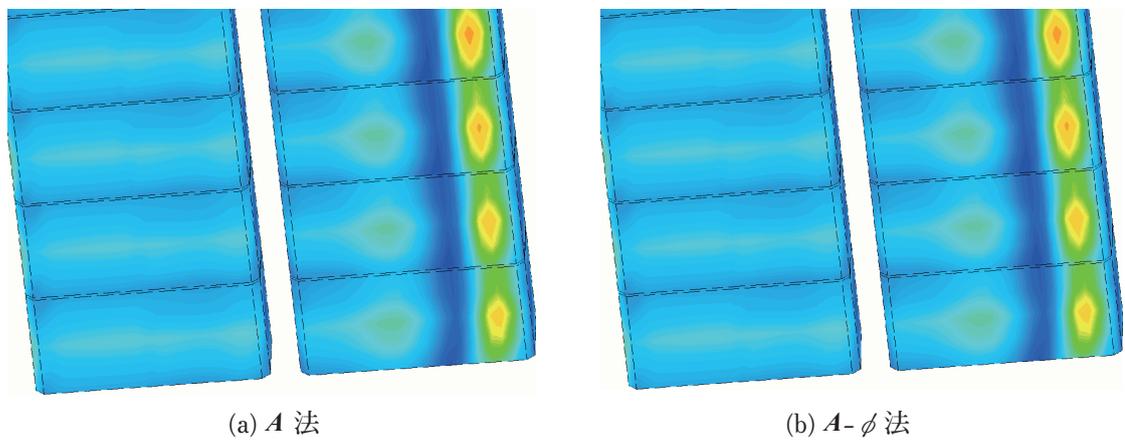


図5 渦電流密度分布

表1 計算時間

	計算時間 (s)	CG法の反復回数
$A-\phi$ 法	655.2	195,453
$A$ 法	984.3	473,610

表2 並列化効率 ( $A-\phi$ 法)

計算時間 (s)	32 CPUs	1077.3
	64 CPUs	655.2
1CPUでの計算時間の推定 (s)		27,247.0
スピードアップ (64 CPUs)		41.6
並列化効率 (%) (64 CPUs)		65.0

### 3.2 周期境界条件を考慮した磁界解析

周期境界を考慮した並列磁界解析の有用性・妥当性を検討するための解析モデルとして図6に示すIPMモータを用いた。周方向に1/1、軸方向に1/11とした1/11モデルと、周期性を考慮して周方向に1/3、軸方向に1/11とした1/33モデルの解析を行った。要素数はそれぞれ7,155,360と2,385,120である。ES2を8ノード(64CPU)使用して計算した。

図7に磁束密度ベクトル分布を示す。1/11モデルと1/33モデルの分布はよく一致しており、周期境界を考慮した並列磁界解析の妥当性が確認できた。

表3に解析の計算時間を示す。参考のためにCG法の反復回数も同表に併せて示す。この例では、周期境界を導入して解析領域を1/3に減らすことで、約2.6倍高速になった。

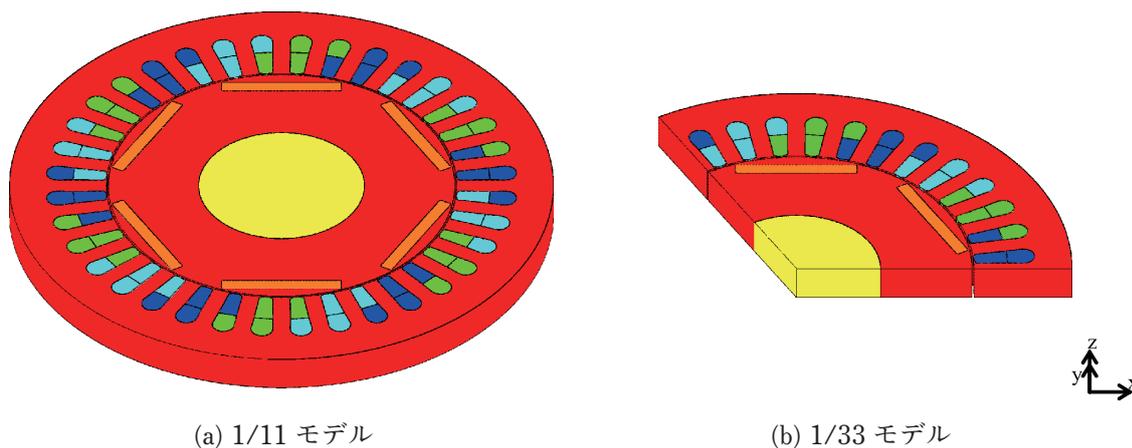


図6 解析モデル

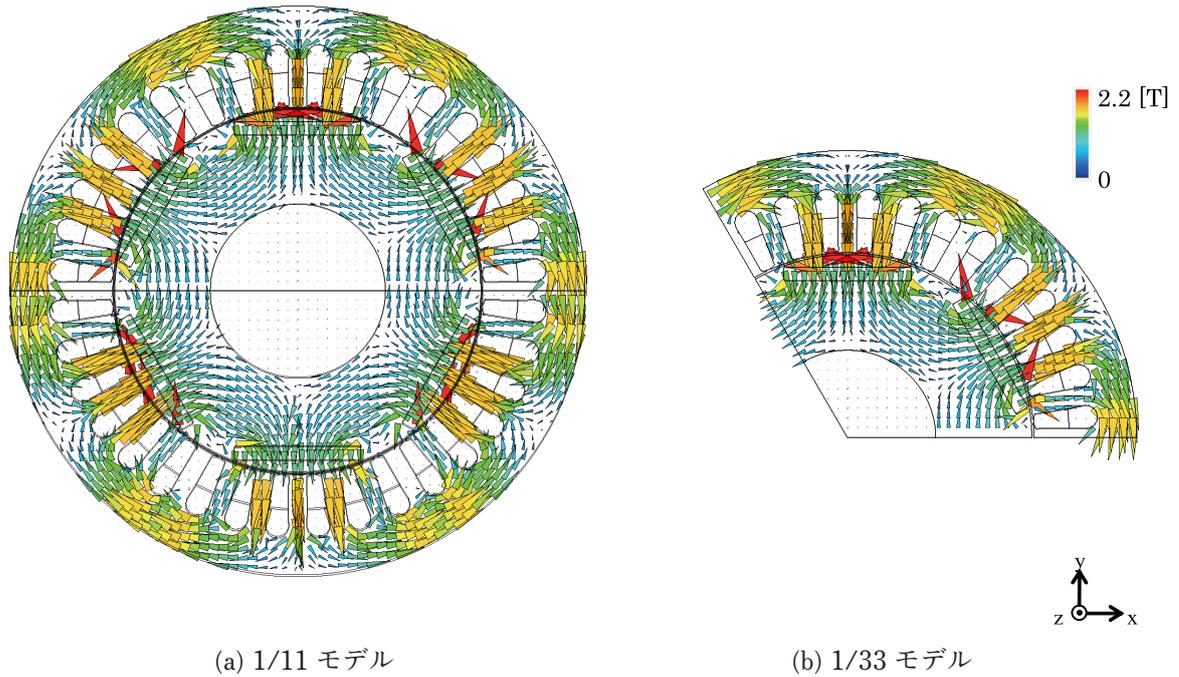


図7 磁束密度ベクトル分布

表3 計算時間

モデル	計算時間 (s)	CG 法の反復回数
1/11	678.4	238,345
1/33	256.5	163,338

#### 4. 結言

今年度に拡張した手法 ( $A-\phi$  法、周期境界条件) の詳細を述べるとともに、ES2 上で並列計算を行った例を示し、その妥当性・有用性を検証した。

$A-\phi$  法による渦電流解析では、 $A$  法と比較して約 1.5 倍高速であることを確認した。また、64CPU を用いて 41.6 倍の台数効果と 65.0% の並列化効率を達成した。

周期境界条件を用いた磁界解析では、解析領域を 1/3 に減らすことで約 2.6 倍高速になった。

これらの成果により、これまで不可能であった大規模な回転機の磁界解析を高速に行うことが可能になった。本報告で示した技術は様々な回転機に幅広く応用できるため、回転機的设计・開発プロセスの効率化に大きく貢献することが期待できる。

今後は、今年度の成果を応用し、鉄心の積層ギャップおよび面内渦電流を考慮した、高精度な解析を行う予定である。

## 謝辞

地球シミュレータの利用にあたり、独立行政法人海洋研究開発機構地球シミュレータセンターシミュレーション応用研究グループの皆様にご指導、ご助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 中村雅憲, 河瀬順洋, 山口忠, 中野智仁, 鵜飼真吾, 西川憲明, 上原均, “三次元有限要素法による回転機の高速度高精度磁界解析技術の開発”, 平成21年度地球シミュレータ産業戦略利用プログラム利用成果報告書, pp.59-65 (2010)
- 2) 中野智仁, 河瀬順洋, 山口忠, 中村雅憲, “A- $\phi$ 法による回転機の三次元渦電流解析の並列化”, 電気学会静止器・回転機合同研究会資料, SA-11-019/RM-11-019 (2011)

## 外部発表等

- 1) 中野智仁, 河瀬順洋, 山口忠, 柴山義康, 大野雄希, 中村雅憲, 西川憲明, 上原均, “地球シミュレータによる偏心したIPMモータの三次元磁界解析”, 第23回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム講演論文集, 1A3-3, pp.61-64 (2011)
- 2) 中野智仁, 河瀬順洋, 山口忠, 中村雅憲, 西川憲明, 上原均, “地球シミュレータを用いた回転機の磁界解析のための並列計算”, 第23回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム講演論文集, 1A3-5, pp.68-73 (2011)