

壁垂直方向に磁場を印加した高レイノルズ数チャンネル乱流場の直接数値シミュレーション

課題責任者

山本 義暢 山梨大学 大学院総合研究部

著者

山本 義暢 山梨大学 大学院総合研究部

江川 隆輔 東北大学 サイバーサイエンスセンター

辻 義之 名古屋大学 大学院工学研究科

本研究ではベクトル型スーパーコンピュータを駆使し、乱流散逸機構における高レイノルズ数および高ハルトマン数効果を解析することに成功した。最大レイノルズ数は摩擦速度に基づくレイノルズ数で1000、最大ハルトマン数は34であり、この種の解析においては世界最大レイノルズ数・ハルトマン数領域の計算である。

乱流散逸機構においては、磁場散逸項の影響は小さいものの、磁場効果による非磁場項の変調効果が大きいことがわかった。またこの乱流散逸機構は、ハルトマン境界層厚に基づくレイノルズ数 R において相似性を有することがわかった。

キーワード：Liquid metal MHD, Turbulent energy dissipation rate, DNS, Turbulence modeling

1. 序論

核融合炉ブランケット第一壁の冷却材として有力視されている溶融塩 (FluBe) の適用 [1, 2] においては、そのMHD (magneto-hydro-dynamics) 効果のモデリングが重要課題となっている。

MHD 乱流モデル解析に、低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルにMHD 散逸効果を加えた計算が一般的である [3-5]。これらのモデルによるMHD 圧力損失に関する定性的な解析は可能であるが、定量性には課題が多い [6]。MHD 乱流解析の高精度化においては、高レイノルズ数条件下での乱流エネルギーおよび散逸率の予測精度向上が必須となっている。

この乱流モデルの高精度化においては、直接数値計算 (Direct numerical simulation, DNS) の適用が最も効果的である。特に核融合炉先進ブランケットデザイン設計においては、強磁場下での高レイノルズ数乱流データベースの構築が重要となっている [7, 8]。近年の計算機能力の発展および並列計算の高度化に伴い、核融合炉デザイン条件に匹敵する高レイノルズ数・高ハルトマン数 (磁場効果) 条件での先駆的なDNSが実行されている [9,10]。しかしながら乱流モデル開発に必要な乱流散逸率の輸送方程式に関するデータベースは得られておらず、現時点で利用可能なデータは、非常に低いレイノルズ数およびハルトマン数 (摩擦速度に基づくレイノルズ数: $Re_\tau=395$, 非: 磁場下, $Re_\tau=150$, ハルトマン数: $Ha=8$) に限定されている [11, 12]。

本研究では、新地球シミュレータを用いて、 $Re_\tau=1000$, $Ha=34$ までのDNSデータベース構築を行う。また得られたデータベースを用いて乱流散逸機構に関する解析を実行する。

2. 直接数値計算の概要

2.1 対象とする流動場

対象とする流動場は、これまでに実行されてきたDNS[9-11]と同様に非圧縮性流体における低磁気レイノルズ数流れである。流れ場は図1に示す、十分に発達したチャンネル乱流場であり壁垂直方向に磁場が印加されている。

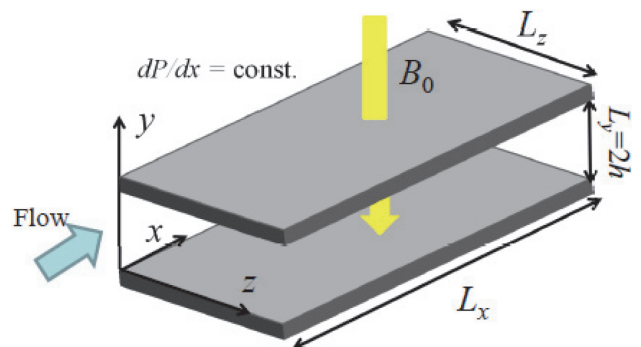


図1 対象とする流動場と座標系。

2.2 支配方程式と数値計算手法^[13]

数値計算手法も先行研究 [9-11] と同様であり、質量保存則、ローレンツ力を考慮した非圧縮性流体のNavier-Stokes式及び低磁気レイノルズ数条件下における電場におけるスカラーポテンシャル近似による磁場方程式である。空間離散化手法は、壁平行方向 (x, z) にフーリエスペクトル法、壁垂直方向 (y) に2次精度中心差分法を適用し、壁平行方向のエイリアシング誤差は位相シフト法 [14] によりこれを除去している。時間積分方法は、対流項に3次精度のRunge-Kutta法、圧力勾配項にEuler陰解法、粘性項にCrank-Nicolson法を適用している。粘性項と圧力及び電場スカラーポテンシャル (ϕ) のポアソン方程式に関するヘルムホルツ方程式は3重対角行列解法 (Tri-diagonal

Matrix Algorithm, TDMA) によりこれを解いている。

境界条件は、速度場に対して、壁面で no-slip 条件、主流 (x) 及びスパン方向 (z) に周期境界条件を課している。電場のスカラーポテンシャルにおいては、壁面は絶縁壁とし、主流及びスパン方向に周期境界条件を課している。またスパン方向の全電流はゼロとした [9-11]。

2.3 計算条件

本研究における計算条件を表 1 に示す。ここに上付き添え字 + は、摩擦速度 (u_τ) と動粘性係数 (ν) により無次元化された値であることを示している。本計算では摩擦速度により定義されるレイノルズ数 ($Re_\tau = u_\tau h/\nu$, h はチャンネル半幅) を 500 及び 1000 に固定して計算した。また磁場効果を示すハルトマン数 ($Ha = B_0 h (\sigma/\rho\nu)^{1/2}$, σ は電気伝導度, ρ は密度) は、 $Re_\tau = 500$ の場合に 0 から 17 まで、同様 $Re_\tau = 1000$ の場合に 0 から 34 まで変化させた。

$Re_\tau = 500$ の場合は、バルクレイノルズ数 ($Re_b = U_b 2h/\nu$, where U_b は断面平均速度) がおよそ 18,000 となり、溶融塩を使用した核融合炉先進ブランケットサイド壁部分におけるデザイン条件 ($Re_b = 12,000$, $Ha = 10$) とほぼ同等となる。

一方、 $Re_\tau = 1000$ の場合は、バルクレイノルズ数が約 40,000 であり、チャンネル幅 ($2h$) 基準によるハルトマン数は最大で 68 に達する。これは溶融塩を対象とした自己冷却ブランケットにおける最大レイノルズ数及びハルトマン数条件 ($Re_b = 40,000$ and $Ha = 40$) に相当する [15]。

壁垂直方向に磁場を印加したハルトマン流において、Boeck らは [10]、平均速度及びレイノルズ応力は、ハルトマン境界層厚 ($\delta = (\rho\nu/\sigma)^{1/2}/B_0$) と層流時におけるチャンネル中心部における主流方向速度 ($U_0 = U_b(1-1/Ha)$) により定義されるレイノルズ数 (R) が同じ場合に相似となることを指摘している。本計算条件では、 R の値は表 1 に示すようにそれぞれ、550 と 850 となる。

磁場効果により乱流は層流化することが知られているため [16]、本計算においては Ha 数の増加に応じて、主流及びスパン方向の格子をやや粗く設定している。なお本計算の格子解像度は最も粗い場合においても、Satake ら

の DNS を上回る解像度となっている (表 1 参照)。

DNS データベースの構築は、海洋研究開発機構及び東北大学サイバーサイエンスセンターの SX-ACE を使用した。SX-ACE/512 ノードを利用した場合、1 タイムステップの時間積分に要する経過時間は約 3.2 秒 (CASE4 の場合) であった。この時計演算速度は、約 20.0TFLOPS (terafloating-point operations per second) であった。

時間積分長は、 $Re_\tau = 1000$ の場合に、摩擦速度と動粘性係数に基づく無次元時間 (T^*) で、11,000 ($Ha = 0$), 15,300 ($Ha = 24$), 21,200 ($Ha = 34$) と設定し、渦の寿命時間スケール T^*/Re_τ の 10 倍を上回る長さを確保している。

2.4 乱流散逸率の輸送方程式

壁垂直方向に磁場を印加し、十分に発達したチャンネル乱流場における乱流散逸率 (ϵ) の輸送方程式は式 (1) で与えられる [4]。

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & \underbrace{-2\nu \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial y}}_{P_\epsilon^1} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}}_{P_\epsilon^2} - \underbrace{2\nu \nu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}_{P_\epsilon^3} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{P_\epsilon^4} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(-\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{T_\epsilon} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(-2\nu \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)}_{\Pi_\epsilon} \\ & + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2}}_{D_\epsilon} - \underbrace{2\nu^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_i}}_{\gamma} \\ & + \underbrace{2 \frac{\nu \sigma B_0}{\rho} \left(-\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x} \right)}_{S_\epsilon^{M1}} - \underbrace{2 \frac{\nu \sigma B_0^2}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 \right]}_{S_\epsilon^{M2}} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 D/Dt は実質微分、 u_i と x_i は主流方向乱流速度と座標 ($u_1 = u$, $x_1 = x$)、壁垂直方向乱流速度と座標 ($u_2 = v$, $x_2 = y$)、そしてスパン方向乱流速度と座標 ($u_3 = w$, $x_3 = z$) を示す。 U は主流方向の平均速度、 p は変動圧力、 ϕ は電場のスカラーポテンシャルである。なお上付き + は、時間 (及び空間) 平均値であることを示す。乱流散逸率 (ϵ) 自体は式 (2) で定義される。

Table 1 計算条件

case	Re_τ	Ha	R	domain L_x, L_y, L_z	grid number N_x, N_y, N_z	Resolution $\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$
1	500	0	-	12.8h, 2h, 6.4h	432, 512, 432	14.8, 0.3-4.0, 7.4
2	500	11	899		384, 512, 384	16.7, 0.3-4.0, 8.3
3	500	17	559		1920, 1024, 1280 768, 1024, 768	6.7, 0.3-4.0, 5.0 16.7, 0.3-4.0, 8.3
4	1000	0	-			
5	1000	24	840			
6	1000	34	567			
Ref. 9	1120	0	-	5 πh ,	1024,	17.2, 0.2-4.0, 9.2
Ref. 9	1150	16.3	1502	2h,	1024,	17.6, 0.2-4.4, 9.4
Ref. 9	1194	32.5	727	2 πh	768	18.2, 0.2-4.5, 9.6

$Re_\tau = u_\tau h/\nu$: friction Reynolds number, u_τ : friction velocity, h : channel half depth, ν : kinematic viscosity, $Ha = B_0 h (\sigma/\rho\nu)^{1/2}$, Hartmann number, B_0 : wall-normal magnetic flux density, σ : electric conductivity, $R = U_0 \delta/\nu$, $U_0 = U_b/(1-1/Ha)$, U_b : bulk mean velocity, L_x ($N_x, \Delta x$), L_y ($N_y, \Delta y$), L_z ($N_z, \Delta z$): computational domain (grid number, resolution) for stream (x), vertical (y), and spanwise (z) directions, respectively.

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2}. \quad (2)$$

乱流散逸率の輸送方程式 (1) の物理的役割は、生成、拡散及び消散の 3 つに分類できる。

生成項は、混合生成項 (P_ε^1)、平均速度による生成項 (P_ε^2)、速度勾配による生成項 (P_ε^3)、そして乱流による生成項 (P_ε^4) から構成される。

拡散項は、乱流拡散項 (T_ε)、圧力拡散項 (Π_ε)、そして粘性拡散項 (D_ε) から構成される。

消散項は、粘性消散項 (γ) 及び MHD 効果による消散項 (S_ε^M) から構成される。本来 MHD 効果による散逸率輸送機構への寄与は、2 つの成分 (S_ε^{M1} , S_ε^{M2}) から構成されるが、これをあわせて MHD による消散項 (S_ε^M) として扱う。MHD 効果は常に乱流散逸率を減少させる効果を担っていると考えられていることと関係がある [4]。

3. 計算結果と考察

3.1 平均速度及び乱流散逸率分布における R 効果

図 2-(1) 及び (2) に $R=850$ 及び 550 の場合の平均速度分布を示す。R が同じ場合における速度分布の相似性 [10] が本結果においても確認できる。 $R=550$ の場合は、ローレ

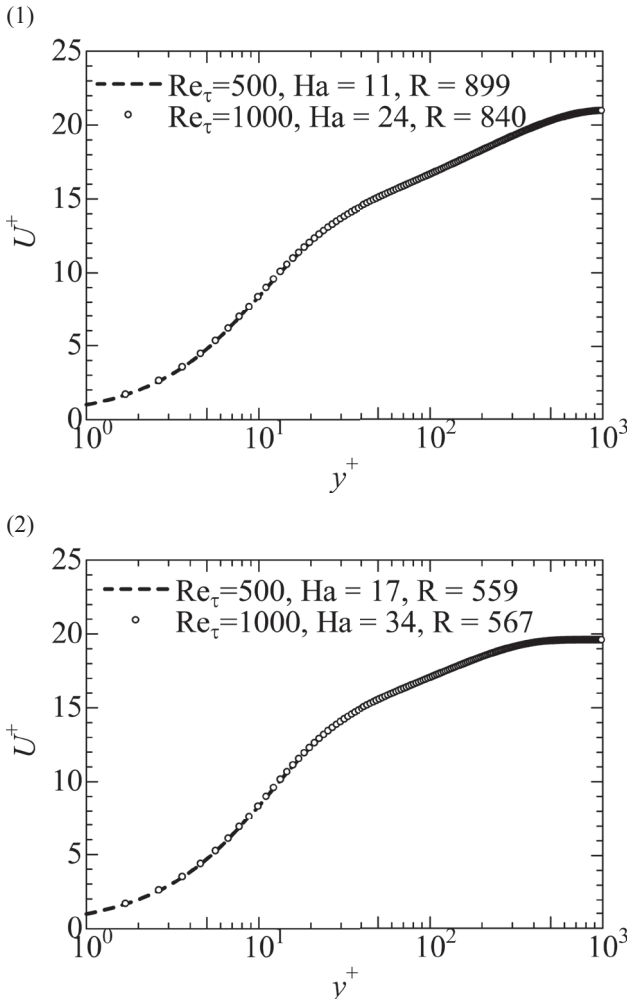


図 2 同一 R 条件における平均速度分布の比較。

ンツ効果により $y^+ > 400$ 以上の領域において平均速度分布の平坦化 [10] が確認できる。同様に乱流散逸率の分布を図 3 に示す。速度分布と同様に乱流散逸率といった高次統計量においても R による相似性が成立することがわかる。

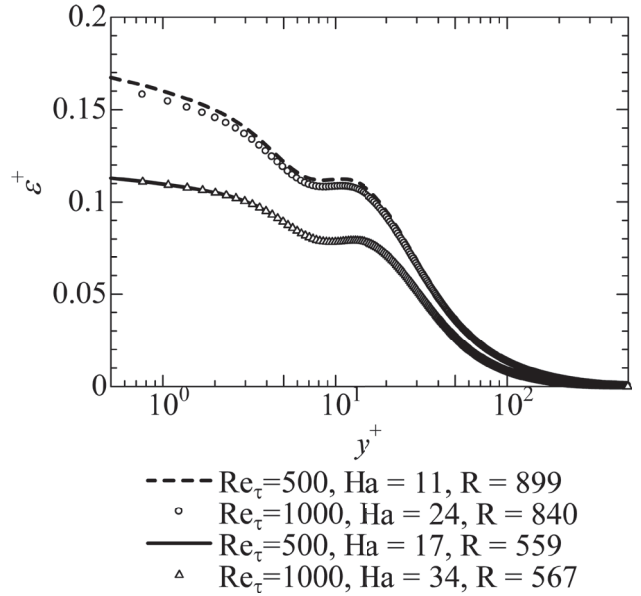


図 3 同一 R 条件における散逸率分布の比較。

3.2 乱流散逸率収支におけるハルトマン数効果

図 4 に $Re_\tau=1000$ における $Ha=0$ 及び 34 のケースの乱流散逸率収支を示す。ここで各項の値は、 u_τ^6/ν^2 により無次元化されている。図 4-(1) に示す非磁場下のケースは、 $Re_\tau=395$ の計算結果 [12] と定性的によく一致しているが、高レイノルズ数効果により、値そのものが大きくなっており、乱流による生成項 (P_ε^4) と粘性による消散項 (γ) においてその特徴が顕著である。これは Rodi and Mansour [12] による理論的予測と整合する。

一方図 4-2 に示す磁場下のケースは、磁場の影響により各項の大きさが小さくなっていることがわかる。MHD 効果による散逸項の寄与は非常に小さく、これは乱流エネルギーにおける MHD 散逸効果の場合 [9] と同様である。磁場下においては、乱流エネルギー、散逸率ともにその分布傾向が変化するがこの磁場効果は、MHD 散逸項を通しての変調ではなく、非磁場項の乱流変調によるものであることがわかる。従って乱流モデリングの観点からは、非磁場項における MHD 効果を反映させることが重要となる。しかし従来の MHD 乱流モデリングにおいては、非磁場項に関する影響を考慮したものはほとんどないのが現状である。

図 5-(1) には乱流散逸率の生成項－粘性消散項の分布を示す。標準型の $k-\varepsilon$ モデル [17] においてはこの生成項－粘性消散項をまとめて式 (3) のようにモデリングされている。

$$P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3 + P_\varepsilon^4 - \gamma = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (3)$$

ここで、 P_k は乱流エネルギーの生成項、 $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ は、モデル係数である。壁の極近傍 ($y^+ = 3-4$) において生成項－粘性消散項の分布形は、ハルトマン数の増加に伴い大きく変化する。非磁場下 ($Ha=0$) においては正の値を示すも

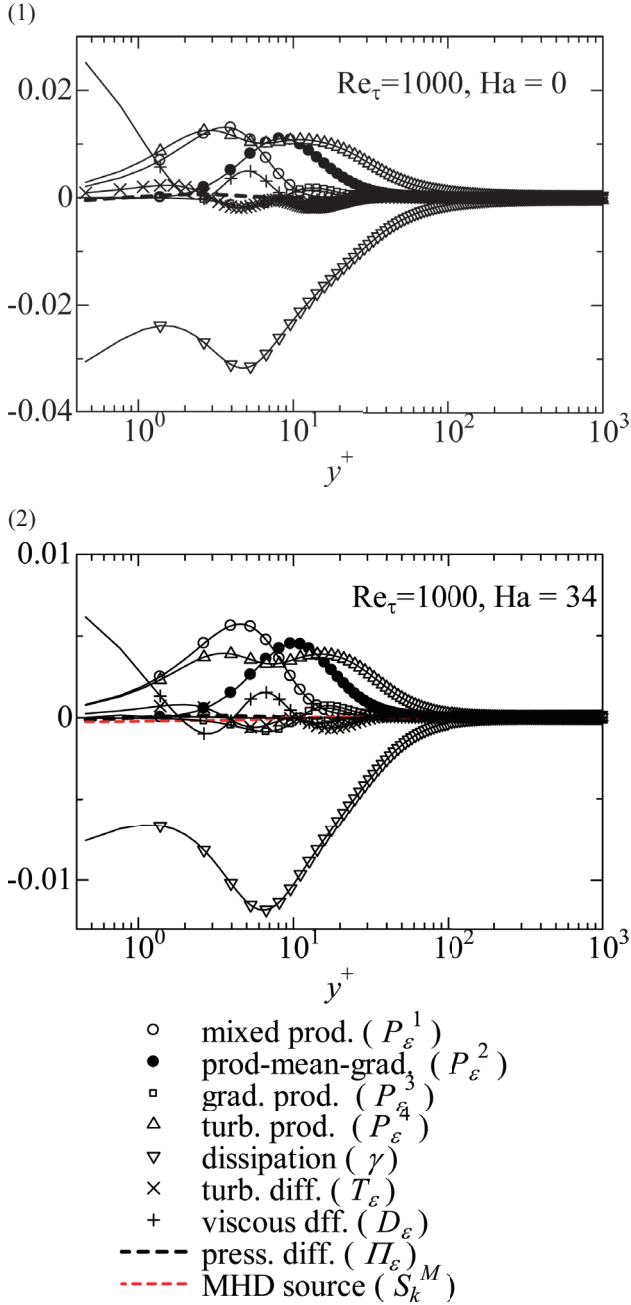


図4 散逸率輸送方程式におけるハルトマン数効果。

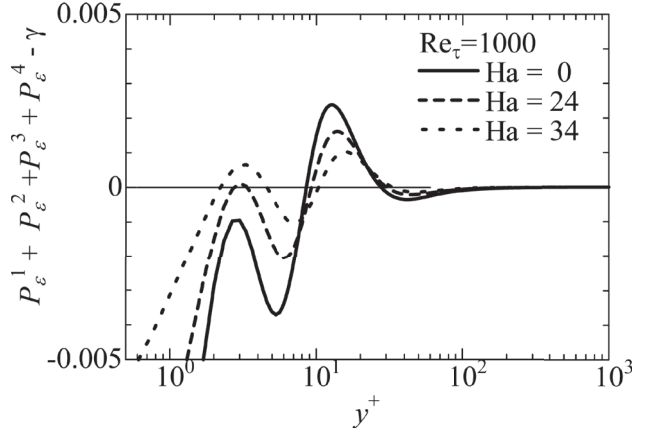
の、磁場下 ($Ha=34$) においては負の値を示す。

一方、バッファ層 ($y^+ = 10-20$) 付近においては、磁場効果により値は小さくなるものの、正・負の逆転といった大きな変化は存在しない。

図5-(2)に乱流拡散項(T_ε) + 圧力拡散項(Π_ε)分布を示す。同様に標準型 $k-\varepsilon$ モデル [17] においては、この2項をまとめて式(4)のようにモデル化されている。

$$T_\varepsilon + \Pi_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right), \quad (4)$$

(1) 生成項 - 消散項



(2) 乱流拡散 + 圧力拡散項

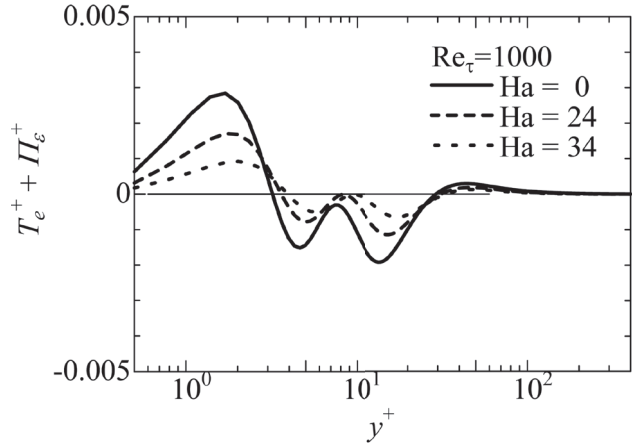


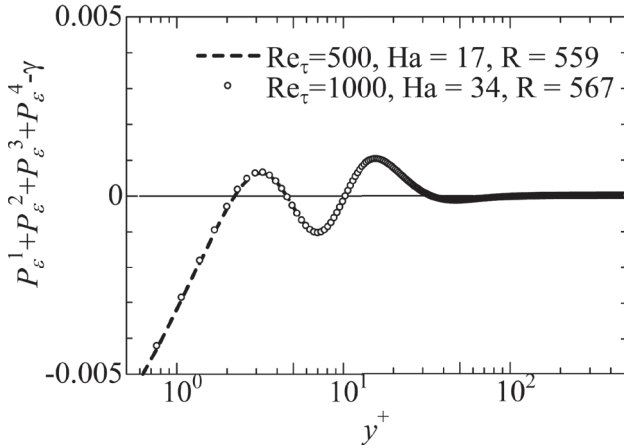
図5 散逸率輸送方程式の各項におけるハルトマン数効果。

ここで ν_T は乱流渦粘性係数、 σ_ε はモデル係数である。乱流拡散項 + 圧力拡散項 ($T_\varepsilon + \Pi_\varepsilon$) は、ハルトマン数の増加に伴いその値は減少するものの定性的な分布傾向は変わらないことがわかる。以上は今後乱流モデルの高精度化を行う上で重要な知見であり、特に生成項 - 粘性消散項の壁近傍での MHD 効果がキーポイントとなることが推測される。

3.3 乱流散逸率収支における R 効果

図6に $R=550$ の場合における、乱流散逸率の各項の比較を示す。これによりすべての項において R が同じ場合は、その分布形は同一となることが明確に確認できる。従って、MHD 乱流モデリングにおいては、この R を用いたモデリングが有効であることがわかる。

(1) 生成項－消散項



(2) 乱流拡散 + 圧力拡散項

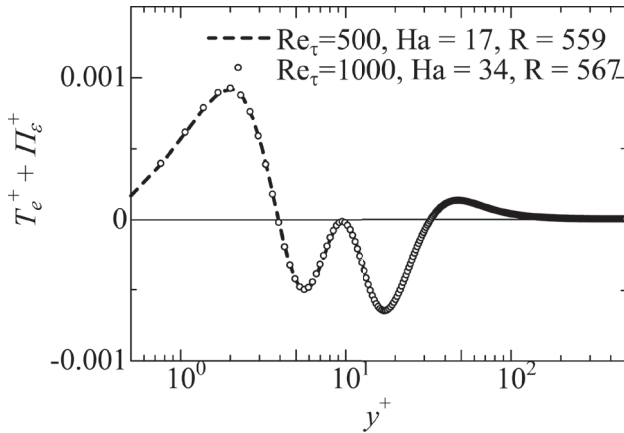


図6 同一 R 条件における散逸率輸送方程式各項の比較。

4. 結論

本研究ではベクトル型スーパーコンピュータを用いて、乱流モデリングにおいて重要となる、高レイノルズ数・高ハルトマン数条件下の乱流散逸率の輸送方程式に関するDNSデータベース構築に成功した。得られたデータベースを解析した結果、

磁場効果の増加に伴い、乱流散逸項の分布形は変化するものの、ハルトマン境界層厚と層流時のチャンネル中心速度により定義されるレイノルズ数：Rが同一であれば、その分布形は相似となることがわかった。

乱流散逸率分布と同様に、乱流散逸率の輸送方程式における各項の分布形もRが同じであれば、相似となることがわかった。これはRが同一であれば、その輸送機構も同一となることを示している。

一方、ローレンツ力による直接的な乱流変調効果は小さく、むしろ非磁場項が磁場効果により変化することにより乱流散逸率の分布形が変調していることがわかった。この非磁場下の変調においては、生成項－粘性消散項の壁近傍での変化が重要であり、今後MHD乱流モデルの高精度化を図る上では、この特性を再現できるモデル開発が必要と考えられる。

文献

- [1] H. Moriyama, A. Sagara, S. Tanaka, R.W. Moir, and D.K. Sze, Molten salts in fusion nuclear technology, *Fusion Eng. Des.* **39**(1998), 627.
- [2] A. Sagara, O. Motojima, K. Watanabe, S. Imagawa, H. Yamanishi, O. Mitarai, T. Satow, H. Tikaishi, and FFHR Group, Blanket and Divertor Design for Force Free Helical Reactor (FFHR), *Fusion Eng. Des.* **29**(1995), 51.
- [3] H.C. Ji and R.A. Gradner, Numerical analysis of turbulent pipe flow in a transverse magnetic field, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **40**(1997), 1839.
- [4] S. Kenjeres and K. Hanjalic, On the implementation of effects of Lorentz force in turbulence closure models, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **21**(2000), 329.
- [5] S. Smolentsev, M. Abdou, N. Morley, A. Ying, and T. Kunugi, Application of the K-e model to Open Channel Flows in a Magnetic Field, *Int. J. Eng. Sci.* **40**(2002), 693.
- [6] Y. Yamamoto, T. Kunugi, S. Satake, and S. Smolentsev, DNS and k-epsilon model simulation of MHD turbulent channel flows with heat transfer, *Fusion Eng. Des.* **83**(2008), 1309.
- [7] C.P.C. Wong, S. Malang, M. Sawan, I. Sviatoslavsky, E. Mogahed, S. Smolentsev, S. Majumdar, B. Merrill, R. Mattas, M. Friend, J. Bolin, and S. Sharafat, Molten salt self-cooled solid first wall and blanket design based on advanced ferritic steel, *Fusion Eng. Des.* **72**(2004), 245.
- [8] J. Takeuchi, S. Satake, N. B. Morley, T. Kunugi, T. Yokomine, and M. Abdou, Experimental study of MHD effects on turbulent flow of Flibe simulant fluid in circular pipe, *Fusion Eng. Des.* **83**(2008), 1082.
- [9] S. Satake, T. Kunugi, K. Takase, and Y. Ose, Direct numerical simulation of turbulent channel flow under a uniform magnetic field for large-scale structures at high Reynolds number, *Phys. Fluids*, **18**(2006), 125106.
- [10] T. Boeck, D. Krasnov, and E. Zienicke, Numerical study of turbulent magnetohydrodynamic channel, *J. Fluid Mech.*, **572**(2007), 179.
- [11] H. Noguchi and N. Kasagi, Direct numerical simulation of liquid metal MHD turbulent channel Flows, JSME, 940-53(1994), 365 (in Japanese).
- [12] W. Rodi and N.M. Mansour, Low Reynolds number k-e modelling with aid of direct simulation data, *J. Fluid Mech.* **250**(1993), 509.
- [13] Y. Yamamoto and T. Kunugi, Direct numerical simulation of MHD heat transfer in high Reynolds number turbulent channel flows for Prandtl number of 25, *Fusion Eng. Des.* **90**(2015), 17.
- [14] G.S. Patterson, and S.A. Orszag, Spectral calculations of isotropic turbulence: Efficient removal of aliasing interactions, *Phys. Fluids* **14**(1971), 2538.

- [15] S. Smolentsev, R. Moreau, L. Bühler, and C. Mistrangelo, MHD thermofluid issues of liquid-metal blankets: phenomena and advances, *Fusion Eng. Des.* 85(7), 2010, 1196.
- [16] Y. Yamamoto and T. Kunugi, Discussion on heat transfer correlation in turbulent channel flow imposed wall-normal magnetic field, *Fusion Eng. Des.* **86**(2011), 2886.
- [17] B.E. Launder and D.B. Spalding, The numerical computation of turbulent flows, *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, **3-2**(1974), 269.

Direct Numerical Simulation of High Reynolds Number Turbulent Flows with an Imposed Wall-normal Magnetic Field

Project Representative

Yoshinobu Yamamoto Division of Mechanical Engineering, University of Yamanashi

Authors

Yoshinobu Yamamoto Division of Mechanical Engineering, University of Yamanashi

Ryusuke Egawa Research Division on SuperComputing Systems, CyberScience Center, Tohoku University

Yoshiyuki Tsuji Department of Energy Engineering and Science, Nagoya University

In this study, we succeeded in establishing DNS database significantly increased the range of Reynolds number and Hartmann numbers for the epsilon transport equation in turbulent channel flows imposed on a wall-normal uniform magnetic field. Maximum friction Reynolds number based on the channel half-height is 1000 with the Hartmann number based on the channel half-height, 0, 24, and 34.

The contribution of MHD source term derived from Lorentz force on the turbulent dissipation process is very small. However modulation of the other terms in this process was remarkably observed with Hartmann number increasing. The turbulent dissipation process under the MHD effects is similar under the same R condition, where R is the Reynolds number based on the Hartmann layer thickness and the laminar centerline velocity.

Keywords: Liquid metal MHD, Turbulent energy dissipation rate, DNS, Turbulence modeling

1. Introduction

Modeling of magneto-hydro-dynamics (MHD) turbulence is a key challenge for the utilization of molten salt as a coolant in the first wall of fusion reactors [1, 2]. The most commonly used MHD turbulence model is the low-Reynolds (Re) number k -epsilon (k - ϵ) model. This kind of models has been developed by Ji & Gradner [3], Kenjeres & Hanjalic [4], and Smolentsev et al [5]. These models can predict fundamental mean velocity characteristics, such as MHD pressure drop, but their accuracy in predicting the turbulent kinetic energy and dissipation rate is insufficient in high-Re flows [6].

Direct numerical simulation (DNS) is most powerful tools for validating MHD turbulence models. In particular, a DNS database of high-Re flows under a magnetic field is critical from the view point of design of advanced fusion blankets [7, 8]. With the developments in computational resources, including parallel computing techniques, Satake et al. [9] and Boeck et al. [10] succeeded in pioneering DNSs of turbulent channel flows imposed on a wall-normal magnetic field up to friction Reynolds number (Re_τ) 1100. However, the high-Re DNS database for the transport equation of turbulent energy dissipation rate has not yet been established. The available DNS database for the transport equation of turbulent energy dissipation rate is up to $Re_\tau=150$ in the MHD case [11] and 395 in the non-MHD case [12].

In this study, we established the DNS database for this transport equation of turbulent energy dissipation rate in channel

flows imposed on wall-normal uniform magnetic fields up to $Re_\tau = 1000$ and with the Hartman number = 34. Using the obtained DNS database, we investigated the turbulent energy dissipation process under MHD effects, from the view point of turbulence modeling.

2. Overview of the DNS database

2.1 Target flow fields

The target flow is an incompressible MHD turbulent flow at a low magnetic Reynolds number as considered in the previous DNS studies [9-11]. The flow was assumed to be a fully-developed turbulent channel flow in the presence of a wall-normal uniform magnetic field. The flow geometry and coordinate system are shown in Fig. 1, where B_0 is the wall-normal uniform magnetic field, h is the channel half-height,

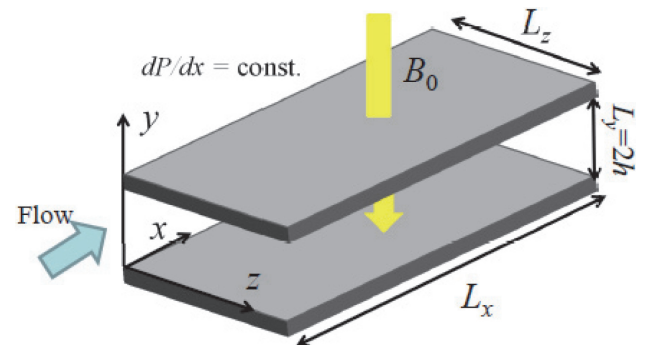


Fig. 1 Flow geometry and coordinate system.

and L_x, L_y, L_z are the streamwise, wall-normal, and spanwise computational lengths, respectively.

2.2 Governing equations and numerical procedures^[13]

The numerical procedures used here are also the same as those in previous studies [9-11]: the continuity, and the momentum equations with an electric field described using the electrical potential approach at a low-magnetic Reynolds number, were solved using a hybrid Fourier spectral method and a second-order central differencing method. To remove the aliasing errors derived from nonlinear terms, the phase-shift method [14] was applied. The time integration methods for the governing equations were as follows: the third-order Runge-Kutta scheme was used for the convection terms, the Crank-Nicolson scheme was used for the viscous terms, and the Euler implicit scheme was used for the pressure terms. The Helmholtz equation for the viscous terms and the Poisson equations for the pressure and electrical potential were solved using a tri-diagonal matrix algorithm in Fourier space.

Nonslip and periodic conditions were imposed for the boundary conditions of the velocities and non-conducting conditions for the electric potential were applied to all walls and a periodic condition was imposed on the horizontal direction. The spanwise total electric current was maintained at zero [9-11].

2.3 Numerical conditions

The numerical conditions for the present DNS are shown in Table 1, where the superscript + denotes the non-dimensional quantities normalized by friction velocity (u_τ) and kinematic viscosity (ν). In our computations, the friction Reynolds number, $Re_\tau = u_\tau h/\nu$ was kept constant at 500 or 1000. The Hartmann number, $Ha = B_0 h (\sigma/\rho\nu)^{1/2}$, where σ is the electrical conductivity and ρ is the density, was changed from 0 to 17 for $Re_\tau = 500$, and from 0 to 34 for $Re_\tau = 1000$.

When $Re_\tau = 500$, the bulk Reynolds numbers ($Re_b = U_b 2h/\nu$, where U_b is the bulk velocity) were approximately 18,000. These numerical conditions correspond to the equivalent

parameters for molten salt blankets in the side channel: $Re_b = 12,000$, $Ha = 20$ [7, 8].

When $Re_\tau = 1000$, the bulk Reynolds numbers were approximately 40,000, and Hartman number based on the channel height ($2h$) was up to 68. These numerical conditions also correspond to the MHD flow conditions of liquid-metal blankets in the Molten salt self-cooled case; $Re_b = 40,000$ and $Ha = 40$ [15].

Boeck et al. [10] showed that the mean velocity and Reynolds shear stress have similar profiles under the same R conditions in the range of $450 < R < 900$. Here R is the Reynolds number based on the Hartmann layer thickness, $\delta = (\rho\nu/\sigma)^{1/2}/B_0$, and the laminar centerline velocity, $U_0 = U_b(1-1/Ha)$, for $Ha > 5$. In this study, R was set to 550 and 850.

To reduce the numerical costs, coarser-resolution grids were adapted in the MHD cases compared with those of the non-MHD cases, because the turbulent kinetic energy in these cases was suppressed, in comparison with the non-MHD case under the same friction Reynolds number [16]. However, higher-resolution grids were ensured in all present cases compared with those in DNS of Satake et al. [9], as shown in Table 1.

The computations were performed on a NEC SX-ACE supercomputer systems at Tohoku University and Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology (JAMSTEC). The computation time per step in CASE4 was 3.2 s by using SX-ACE/2048 cores and the computational speed was measured to be up to 20.0 TFLOPS (terafloating-point operations per second). To obtain the statistical values, the time integration was conducted during 11,000, 15,300, and 21,200 in the normalized time units based on friction velocity and kinematic viscosity for $Ha = 0, 24$, and 34 at $Re_\tau = 1000$, respectively.

2.4 Transport equation of turbulent energy dissipation rate

For the fully-developed channel flow under the wall-normal magnetic field, the transport equation of turbulent energy dissipation rate (ϵ) is given by Eq. (1) [4].

Table 1 Numerical conditions

case	Re_τ	Ha	R	domain L_x, L_y, L_z	grid number N_x, N_y, N_z	Resolution $\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$
1	500	0	-	12.8h, 2h, 6.4h	432, 512, 432	14.8, 0.3-4.0, 7.4
2	500	11	899		384, 512, 384	16.7, 0.3-4.0, 8.3
3	500	17	559			
4	1000	0	-		1920, 1024, 1280	6.7, 0.3-4.0, 5.0
5	1000	24	840		768, 1024, 768	16.7, 0.3-4.0, 8.3
6	1000	34	567			
Ref. 9	1120	0	-	5 π h, 2h, 2 π h	1024,	17.2, 0.2-4.0, 9.2
Ref. 9	1150	16.3	1502		1024,	17.6, 0.2-4.4, 9.4
Ref. 9	1194	32.5	727		768	18.2, 0.2-4.5, 9.6

$Re_\tau = u_\tau h/\nu$: friction Reynolds number, u_τ : friction velocity, h : channel half depth, ν : kinematic viscosity, $Ha = B_0 h (\sigma/\rho\nu)^{1/2}$, Hartmann number, B_0 : wall-normal magnetic flux density, σ : electric conductivity, $R = U_0 \delta/\nu$, $U_0 = U_b/(1-1/Ha)$, U_b : bulk mean velocity, $L_x (N_x, \Delta x)$, $L_y (N_y, \Delta y)$, $L_z (N_z, \Delta z)$: computational domain (grid number, resolution) for stream (x), vertical (y), and spanwise (z) directions, respectively.

$$\begin{aligned}
 \frac{D\varepsilon}{Dt} = & -2\nu \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial y}}_{P_\varepsilon^1} - 2\nu \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}}_{P_\varepsilon^2} - 2\nu \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}_{P_\varepsilon^3} - 2\nu \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{P_\varepsilon^4} \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-2\nu \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \\
 & + \underbrace{v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2}}_{D_\varepsilon} - 2\nu^2 \underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}}_{\gamma} \\
 & + 2 \underbrace{\frac{\nu \sigma B_0}{\rho} \left(-\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x} \right)}_{S_\varepsilon^{M1}} - 2 \underbrace{\frac{\nu \sigma B_0^2}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 \right]}_{S_\varepsilon^{M2}} = 0
 \end{aligned} \quad (1)$$

Here, D/Dt is the substantial derivative, u_i and x_i are the streamwise ($u_1 = u$, $x_1 = x$), vertical ($u_2 = v$, $x_2 = y$), and spanwise ($u_3 = w$, $x_3 = z$) turbulent velocities and directions, respectively. U is the streamwise mean velocity, p is the pressure, ϕ is the electric potential, and over bar ($\bar{}$) denotes a time average. The energy dissipation rate (ε) itself is defined by

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (2)$$

The transport equation (1) of the turbulent energy dissipation rate is classified into three terms for types of their contributions. That is the production, diffusion, and destruction terms, respectively.

The production terms comprise the mixed production (P_ε^1), the production by mean velocity (P_ε^2), the gradient production (P_ε^3), and the turbulent production (P_ε^4).

The diffusion terms comprise the turbulent diffusion (T_ε), the pressure diffusion (Π_ε), and the viscous diffusion (D_ε).

The destruction terms comprise the viscous destruction rate (γ) and the magnetic source term (S_ε^M). Two types of MHD effects (S_ε^{M1} , S_ε^{M2}) were considered as one dissipative source term. In short, the Lorentz force always acted as the dissipative contribution to the turbulent energy dissipation rate [4].

3. Results and discussion

3.1 R effects on mean velocity and turbulent energy dissipation rate profiles

Figures 2-(1) and (2) show the mean velocity profiles at $R = 850$ and 550 . The similarity of the mean velocity profiles under the same R conditions [10] was clearly confirmed. Due to the Lorentz force, the plateau velocity profiles [10] appeared at the wall-normal height $y^+ > 400$ when $R = 550$. Under the same R conditions, the similarity both the mean velocity profiles and the turbulent energy dissipation rate profiles can also be observed from Fig. 3. Thus, a similar turbulent dissipation process is expected under the same R conditions.

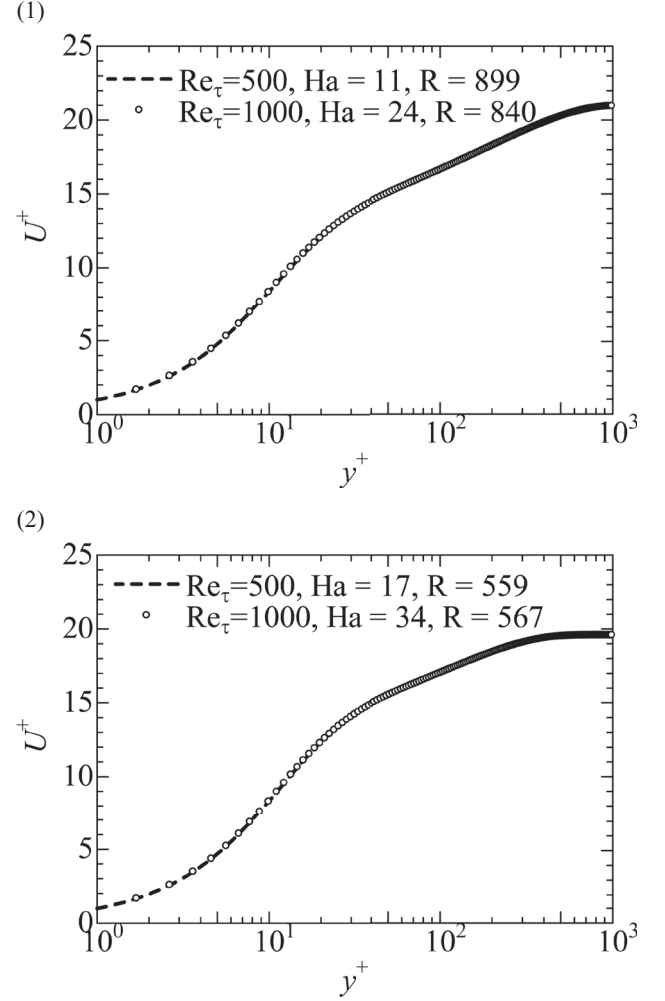


Fig. 2 Comparison of mean velocity profiles in same R conditions.

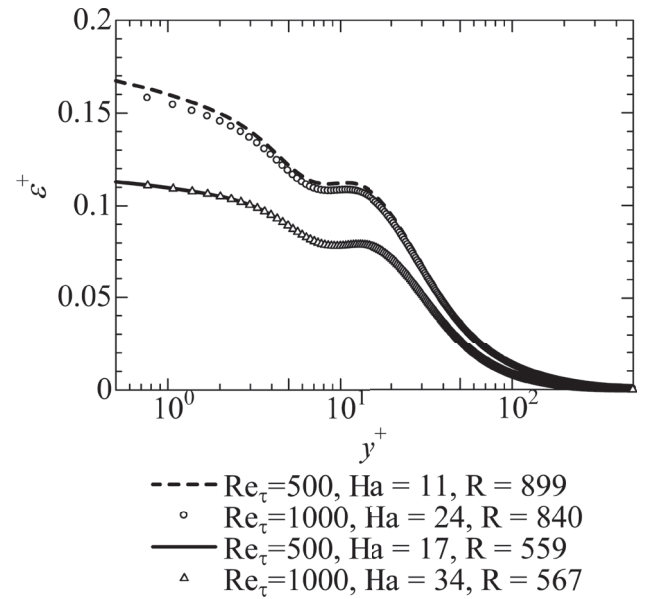


Fig. 3 Comparison of turbulent energy dissipation rate profiles in same R conditions.

3.2 Hartmann number effects on budget of turbulent energy dissipation rate

The budgets of the turbulent energy dissipation rate in cases of $Re_\tau = 1000$, $Ha = 0$ and $Re_\tau = 1000$, $Ha = 34$ are shown in Fig. 4. All terms in Eq. (1) were normalized using u_τ^6/v^2 .

As shown in Fig. 4-(1), in the case of $Re_\tau = 1000$, $Ha = 0$, the contributions of each terms to the budget were in good agreement with the case of $Re_\tau = 395$ [12], but the magnitude of the terms in the high-Re case of $Re_\tau = 1000$ was increased, particularly those for the turbulent production (P_ε^4) and viscous destruction rate (γ). This increasing tendency in terms of P_ε^4 and γ is consistent with the theoretical estimations by Rodi and Mansour [12].

As shown in Fig. 4-(2), in the case of $Re_\tau = 1000$, $Ha = 34$, the magnitude of each terms is suppressed by the magnetic field, but

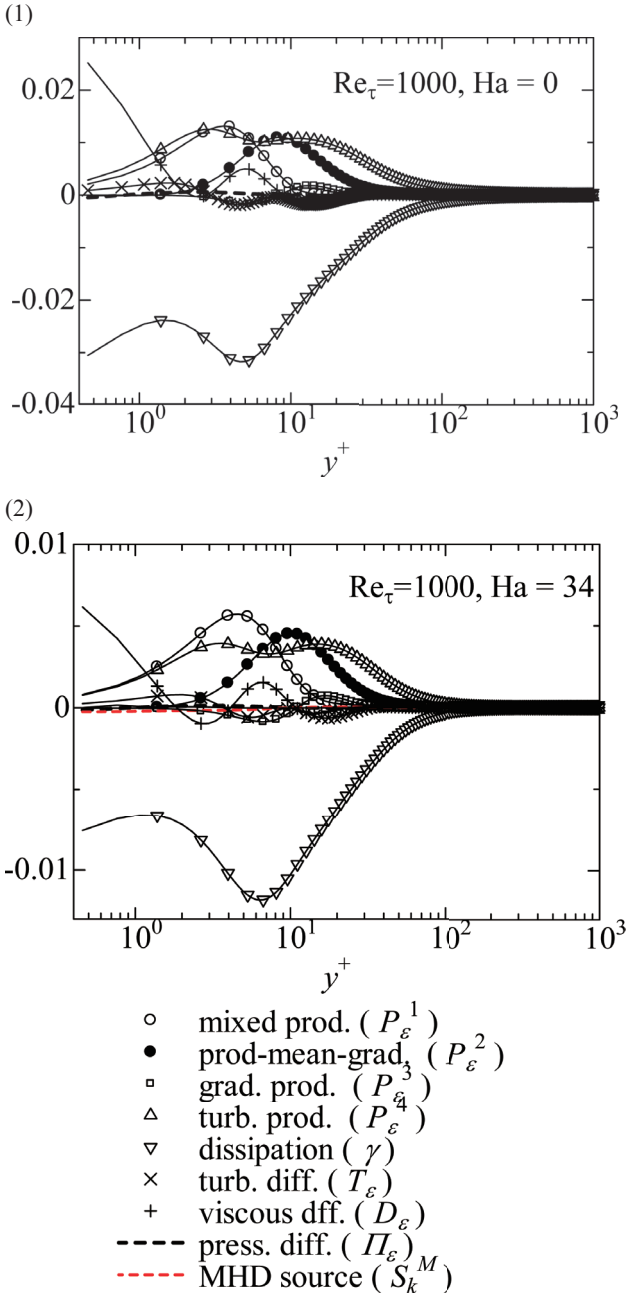


Fig. 4 Hartmann number effects on budget of turbulent dissipation rate.

the contribution of several terms shows little difference between two figures. Moreover, the contribution of the magnetic source term (S_k^M) is very small compared with that of the other terms through the channel. In the case of turbulent kinetic energy, the contribution of the MHD source term is also small [9]. Thus, the effects of the Lorentz force on the turbulent transport processes such as the turbulent kinetic energy and dissipation rate, were not directly acted on by the MHD source terms. Therefore, the modulation of non-MHD terms in Eq. (1) by MHD effects is important from the view point of MHD turbulence modeling. However, the modulation of non-MHD terms in this transport equation has not been previously seen as a concern.

Figure 5-(1) shows the contribution of the production minus the viscous destruction on the transport equation (1). In the standard k - ε model [17], the production and viscous destruction terms were modeled together as follows:

$$P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3 + P_\varepsilon^4 - \gamma = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (3)$$

Here, P_k is the production of turbulent kinetic energy k , and $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ are model parameters.

The behavior of the peak at the vicinity wall ($y^+ = 3-4$) was sensitive to increases in Ha . This peak value showed a negative

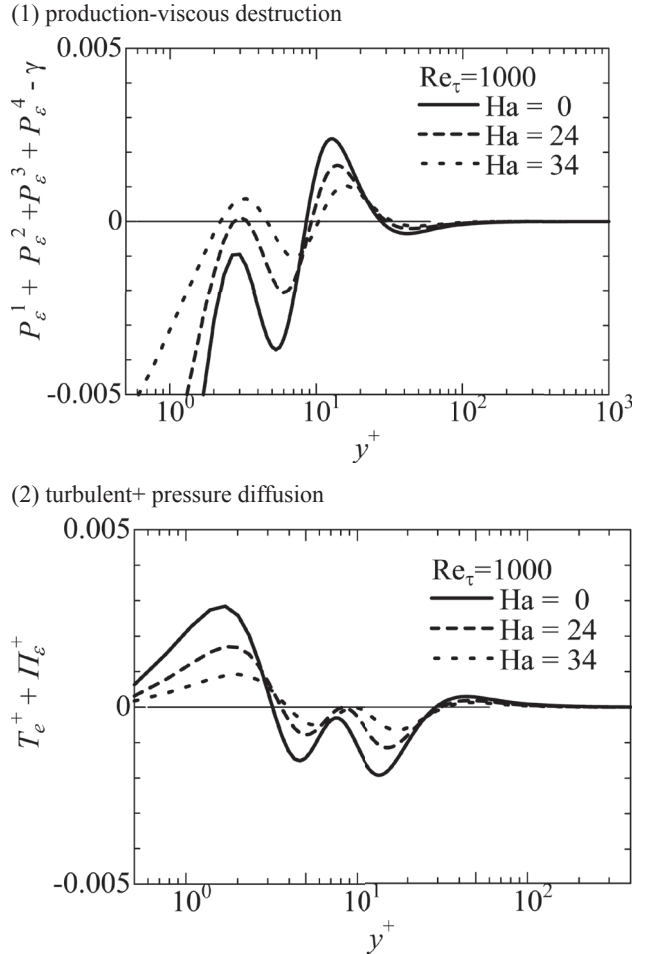


Fig. 5 Hartmann number effects on each term in the transport equation of turbulent dissipation rate.

contribution in the case of $Ha = 0$, but a positive contribution in the case of $Ha = 34$. In contrast, the behaviors of the peak at the buffer layer ($y^+ = 10\text{--}20$) showed a positive contribution, but the magnitude of the peaks had a decreasing trend.

Figure 5-(2) shows the contribution of the turbulent diffusion term (T_ε) plus the pressure diffusion term (Π_ε). In the standard $k\text{--}\varepsilon$ model [17], these terms were also modeled together as follows:

$$T_\varepsilon + \Pi_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right), \quad (4)$$

where, ν_T is turbulent viscosity, and σ_ε is the model parameter. As Ha increases, the behaviors of terms ($T_\varepsilon + \Pi_\varepsilon$) show a similar contribution, but the magnitude of the term decreases.

3.3 R effects on budget of turbulent energy dissipation rate

Figure 6 shows comparison of each term in the transport equation of the turbulent dissipation rate in the same R conditions ($R = 550$). Across all terms, the similarity under the same R condition was clearly confirmed.

From the view point of high-accuracy prediction of the modulation of the non-MHD terms, R, which is the Reynolds

number based on the Hartmann layer thickness and the laminar centerline velocity, is important because the turbulent energy dissipation process is similar under the same R condition.

4. Conclusions

In this study, we succeeded in establishing DNS database significantly increased the range of Reynolds number and Hartmann numbers for the epsilon transport equation in turbulent channel flows imposed on a wall-normal uniform magnetic field.

The DNS results for the turbulent energy dissipation rate show a decreasing trend with increasing of Ha , but the profiles of the turbulent energy dissipation rate have the clearly similarities at the same R, which is the Reynolds number based on the Hartmann layer thickness and the laminar centerline velocity.

Like the turbulent energy dissipation profiles, each of the budget terms shows a decreasing trend with increasing of Ha , and the profiles and transport equation in the energy dissipation rate also similar under the same R conditions.

The contribution of the magnetic source term derived from the Lorentz force to the turbulent dissipation process was very small. However, in the vicinity of the wall, the contribution of production – destruction shows opposite behavior as Ha increases. Therefore, modulation of the non-MHD terms is important from the view point of turbulence modeling.

References

- [1] H. Moriyama, A. Sagara, S. Tanaka, R.W. Moir, and D.K. Sze, Molten salts in fusion nuclear technology, *Fusion Eng. Des.* **39**(1998), 627.
- [2] A. Sagara, O. Motojima, K. Watanabe, S. Imagawa, H. Yamanishi, O. Mitarai, T. Satow, H. Tikaraishi, and FFHR Group, Blanket and Divertor Design for Force Free Helical Reactor (FFHR), *Fusion Eng. Des.* **29**(1995), 51.
- [3] H.C. Ji and R.A. Gradner, Numerical analysis of turbulent pipe flow in a transverse magnetic field, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **40**(1997), 1839.
- [4] S. Kenjeres and K. Hanjalic, On the implementation of effects of Lorentz force in turbulence closure models, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **21**(2000), 329.
- [5] S. Smolentsev, M. Abdou, N. Morley, A. Ying, and T. Kunugi, Application of the K- ε model to Open Channel Flows in a Magnetic Field, *Int. J. Eng. Sci.* **40**(2002), 693.
- [6] Y. Yamamoto, T. Kunugi, S. Satake, and S. Smolentsev, DNS and k-epsilon model simulation of MHD turbulent channel flows with heat transfer, *Fusion Eng. Des.* **83**(2008), 1309.
- [7] C.P.C. Wong, S. Malang, M. Sawan, I. Sviatoslavsky, E. Mogahed, S. Smolentsev, S. Majumdar, B. Merrill, R. Mattas, M. Friend, J. Bolin, and S. Sharafat, Molten salt self-cooled solid first wall and blanket design based on

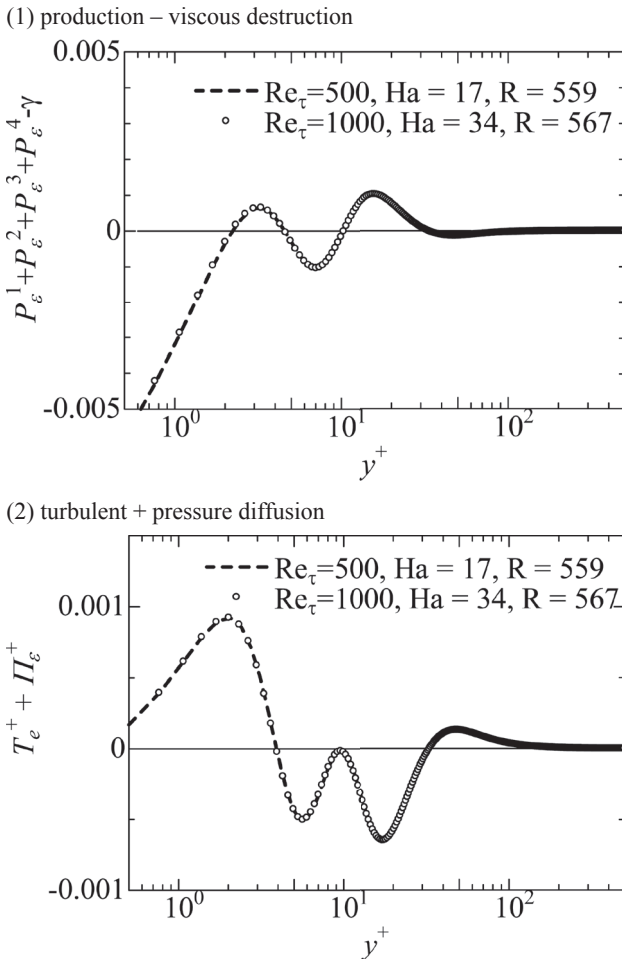


Fig. 6 Comparison of each term in the transport equation of the turbulent dissipation rate in same R conditions.

- advanced ferritic steel, *Fusion Eng. Des.* **72**(2004), 245.
- [8] J. Takeuchi, S. Satake, N B. Morley, T. Kunugi, T. Yokomine, and M. Abdou, Experimental study of MHD effects on turbulent flow of Flibe simulant fluid in circular pipe, *Fusion Eng. Des.* **83**(2008), 1082.
- [9] S. Satake, T. Kunugi, K. Takase, and Y. Ose, Direct numerical simulation of turbulent channel flow under a uniform magnetic field for large-scale structures at high Reynolds number, *Phys. Fluids*, **18**(2006), 125106.
- [10] T. Boeck, D. Krasnov, and E. Zienicke, Numerical study of turbulent magnetohydrodynamic channel, *J. Fluid Mech.*, **572**(2007), 179.
- [11] H. Noguchi and N. Kasagi, Direct numerical simulation of liquid metal MHD turbulent channel Flows, JSME, 940-53(1994), 365 (in Japanese).
- [12] W. Rodi and N.M. Mansour, Low Reynolds number k- ϵ modelling with aid of direct simulation data, *J. Fluid Mech.* **250**(1993), 509.
- [13] Y. Yamamoto and T. Kunugi, Direct numerical simulation of MHD heat transfer in high Reynolds number turbulent channel flows for Prandtl number of 25, *Fusion Eng. Des.* **90**(2015), 17.
- [14] G.S. Patterson, and S.A. Orszag, Spectral calculations of isotropic turbulence: Efficient removal of aliasing interactions, *Phys. Fluids* **14**(1971), 2538.
- [15] S. Smolentsev, R. Moreau, L. Bühler, and C. Mistrangelo, MHD thermofluid issues of liquid-metal blankets: phenomena and advances, *Fusion Eng. Des.* **85**(7), 2010, 1196.
- [16] Y. Yamamoto and T. Kunugi, Discussion on heat transfer correlation in turbulent channel flow imposed wall-normal magnetic field, *Fusion Eng. Des.* **86**(2011), 2886.
- [17] B.E. Launder and D.B. Spalding, The numerical computation of turbulent flows, *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, **3-2**(1974), 269.