

密度成層乱流のプラントル数依存性

課題責任者

花崎 秀史

京都大学大学院 工学研究科

著者

花崎 秀史*¹, 沖野 真也*¹

*¹ 京都大学大学院 工学研究科

密度成層流体における減衰乱流のプラントル数依存性を、直接数値シミュレーションにより調べた。等方乱流においては、プラントル数が 1 より大きいパッシブスカラーの攪乱はコルモゴロフ・スケールより小さいスケールにまでカスケードし、そのパワースペクトルは粘性移流領域において k^{-1} に比例することが知られている。密度成層乱流においても、オズミドフ・スケールがコルモゴロフ・スケールよりも小さくなるまでの初期時刻では、密度成層を形成するスカラーはパッシブスカラーと同様に振る舞う。しかし、オズミドフ・スケールがコルモゴロフ・スケールよりも小さくなると、コルモゴロフ・スケール程度のスケールの速度場では鉛直せん断水平流が支配的となることで、小スケールの密度攪乱が鉛直方向にのみ形成される。

キーワード：成層流体, 乱流, 高プラントル数, エネルギースペクトル, 直接数値計算

1. 緒言

大気や海洋は、時間平均的には下方ほど密度の大きい密度成層を形成している。海洋における密度成層は塩分と温度によって形成されるが、特に、塩分の拡散係数は非常に小さく、拡散係数 κ^* に対する流体の動粘性係数 ν^* の比であるプラントル数は非常に大きな値をとる ($Pr = \nu^*/\kappa^* = 700$)。

流れに影響を及ぼすことなく、受動的に運動する“パッシブスカラー”の等方乱流中でのスペクトルに関する研究として Batchelor [1] が挙げられる。そこでは、 $Pr \gg 1$ のスカラーは速度場の最小スケールに相当するコルモゴロフ波数 k_K^* よりも大きな波数 ($k_B^* = Pr^{1/2} k_K^*$) において散逸し、粘性移流領域 ($k_K^* < k < k_B^*$) において、スカラースペクトルは波数 k^* の -1 乗に比例することが理論的に示された。後に、実験 [2] や数値計算 [3] などにより Batchelor の理論が成り立つことは確認されている。

一方、密度成層乱流、すなわち熱や塩分のように浮力を介して流れに影響を及ぼす“アクティブスカラー”が鉛直方向に平均勾配をもつ流体中の乱流について、これまで数多くの研究がなされてきた (e. g. [4-6]) が、ほとんどの場合、 $Pr = 1$ が対象であり、実用上重要な対象である、高プラントル数の流れに関する知見は乏しい。そこで本報では、塩分のような非常に高プラントル数 ($Pr = 700$) のスカラーの振舞いを調べる前段階として、プラントル数が 70 までの密度成層流体中の減衰乱流を大規模直接数値計算によって解析した結果について述べる。

2. 直接数値計算

周期境界を有する立方体領域中の密度成層流体を取り扱う。本研究では、減衰乱流、すなわち初期攪乱の時間発展を計算の対象とする。初期速度場として等方的な攪乱 (スペクトルの形は [7, 8] と同様) を与え、初期密度場は攪乱がないものとした。

系を支配する方程式は、連続の式、ブジネスク近似を施したナビエ・ストークス方程式と密度攪乱の輸送方程式である。フーリエ・スペクトル法によって支配方程式の直接数値計算を実施した。非線形項の評価の際に生じるエイリアス誤差は 3/2 則によって除去した。また、時間積分は 4 次精度のルンゲ・クッタ法により実行した。計算に用いる格子点数は最大で 2048³ 点とした。

本研究では、初期レイノルズ数と初期フルード数をそれぞれ $Re_0 = U_0^* L_0^*/\nu^* = 100, Fr_0 = U_0^*/(N^* L_0^*) = 1$ として計算を実施した。ただし、 U_0^* は初期 rms 速度、 L_0^* は初期攪乱の積分長、 N^* はプラント・パイサラ振動数であり、 N^* は平均密度勾配 $d\bar{\rho}^*/dz^*$ から決定される。三通りのプラントル数 ($Pr = 1, 7, 70$) に対し、流れの変化を調べた。以下では、アスタリスクなしの物理量は長さスケール L_0^* 、速度スケール U_0^* 、密度スケール $-L_0^* d\bar{\rho}^*/dz^*$ によって無次元化されているものとする。

本研究では、非線形項を評価する際の三次元実 FFT の MPI 並列化をおこなった。計算領域を一方向に対して分割し、適宜データの転置をおこなって同一ノード内で FFT を実行した。格子点が 2048³ 点の場合、SX-AGE を 256 ノード利用して計算を行った。

3. 結果

図 1(a,b)に、時刻 $t = 4$ におけるポテンシャルエネルギーの空間分布を示す。時刻 $t = 4$ では、オズミドフ・スケール (浮力が効く最小スケール) はコルモゴロフ・スケール (速度場の最小スケール) よりも大きく、浮力の効果は比較的大スケールに限定されている。このとき、ポテンシャルエネルギーの分布は等方的であり、各々の等値面は薄いシート状に引き延ばされている。 $Pr = 1$ のスカラー (図 1a) に比べ、 $Pr = 70$ のスカラー (図 1b) のほうが分子拡散の効果が小さいため、より細かいスケールの密度変動が作られている様子が見てとれる。

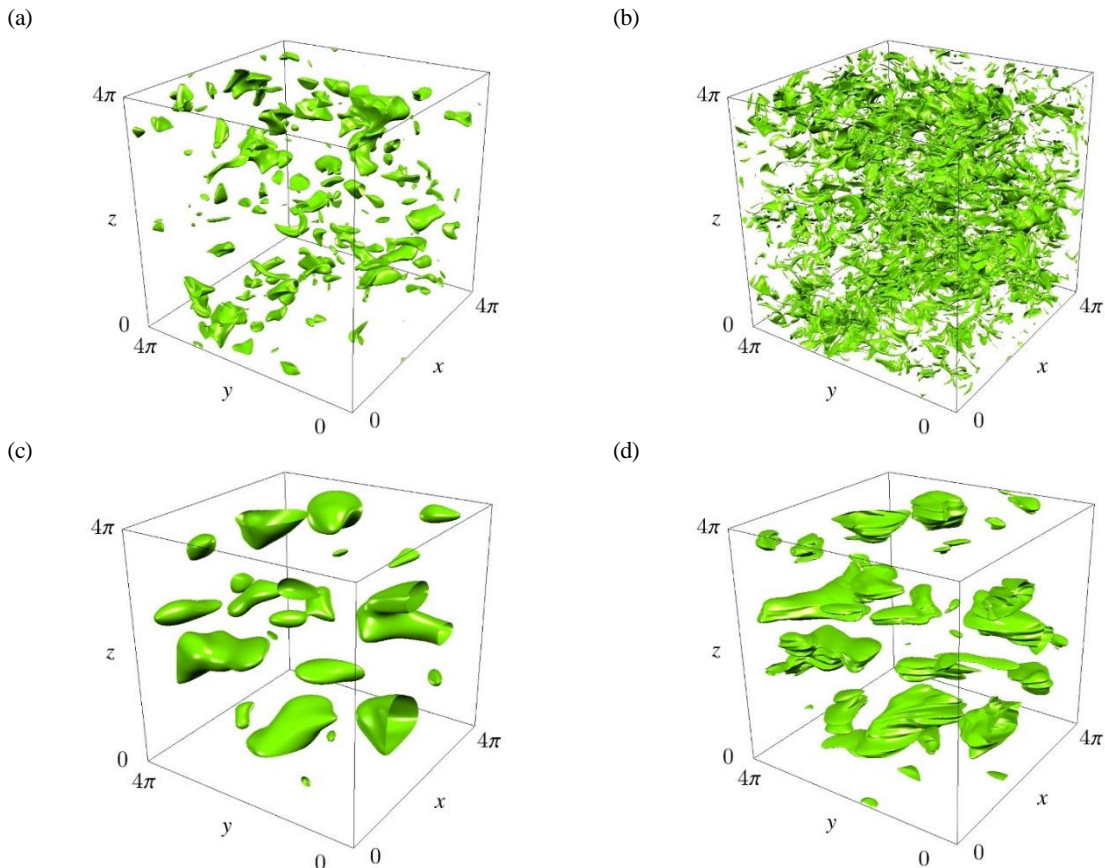


図 1. ポテンシャルエネルギーの空間分布。(a,b) $t = 4$ 、(c,d) $t = 40$ 。各図は、(a) $\rho'^2/(2Fr_0^2) = 6PE$ at $Pr = 1$; (b) $\rho'^2/(2Fr_0^2) = 6PE$ at $Pr = 70$; (c) $\rho'^2/(2Fr_0^2) = 4PE$ at $Pr = 1$; (d) $\rho'^2/(2Fr_0^2) = 4PE$ at $Pr = 70$ の等値面を示す。ここで、 PE はポテンシャルエネルギーの空間平均値である。

時刻 $t = 4$ におけるポテンシャルエネルギースペクトルのプラントル数依存性を図 2 に示す。プラントル数が大きいほど、より高波数の（小スケールの）密度攪乱までエネルギーがカスケードされることが分かる。さらに、 $Pr = 70$ の場合、粘性移流領域 ($k_K < k < k_B$) において、ポテンシャルエネルギースペクトルは k^{-1} に比例している。以上に述べた特徴は、Batchelor [1] が理論により導いた、(浮力をもたない) パッシブスカラーの特徴と同一であり、浮力の影響がコルモゴロフ・スケールにまで及ばない限り、浮力をもつスカラーであってもパッシブスカラーと同様に振る舞うことを示している。

時刻の経過とともに、浮力の影響は小スケールに及び、本計算の場合、 $t = 8$ 程度でオズミドフ・スケールはコルモゴロフ・スケールを下回る。図 1(c, d) はさらに時刻が経過した、 $t = 40$ におけるポテンシャルエネルギーの空間分布である。浮力による影響を強く受けることで、ポテンシャルエネルギーの等値面は鉛直方向に薄く、水平方向に伸びた構造を示す。このような扁平な構造は、しばしばパンケーキ構造と呼ばれる。ここで注目すべきは、そのプラントル数依存性である。減衰初期 ($t = 4$) とは異なり、水平方向のスケールは $Pr = 1$ の場合と $Pr = 70$ の場合でほぼ同一である一方、 $Pr = 70$ の密度攪乱には鉛

直方向にのみ微細な構造（パンケーキ構造の表面に見られる水平方向のしわ）が見られる。

浮力の影響が支配的となったのちに、高プラントル数のスカラーに見られる特徴的な構造 (図 1d) の成因を調べるため、運動エネルギー散逸率に最も寄与する速度勾配に注目する。そのために、運動エネルギー散逸率 ϵ_K を四つの成分に分解する：

$$\epsilon_K = \epsilon_{H,H} + \epsilon_{H,V} + \epsilon_{V,H} + \epsilon_{V,V}. \quad (1)$$

ここで、

$$\epsilon_{H,H} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (2)$$

(水平流の水平せん断)

$$\epsilon_{H,V} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \quad (3)$$

(水平流の鉛直せん断)

$$\epsilon_{V,H} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (4)$$

(鉛直流の水平せん断)

$$\epsilon_{V,V} = \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (5)$$

(鉛直流の鉛直せん断)

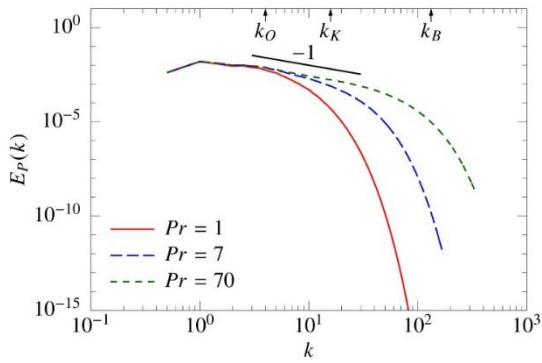


図 2. 時刻 $t = 4$ におけるポテンシャルエネルギースペクトル $E_p(k)$ のプラントル数依存性。図上部の矢印は、 $Pr = 70$ におけるコルモゴロフ波数 (k_K)、オズミドフ波数 (k_O)、バチェラー波数 (k_B) を示す。これらの波数は有次元では、 $k_K^* = (\epsilon_K^*/\nu^3)^{1/4}$ 、 $k_O^* = (N^*3/\epsilon_K^*)^{1/2}$ 、 $k_B^* = Pr^{1/2}(\epsilon_K^*/\nu^3)^{1/4}$ により定義される。ただし、 ϵ_K^* は運動エネルギー散逸率である。

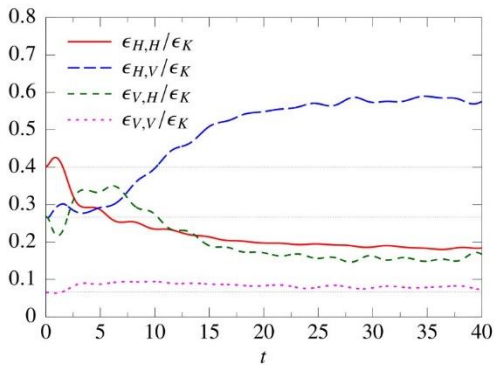


図 3. 運動エネルギー散逸率 ϵ_K に対する $\epsilon_{H,H}$, $\epsilon_{H,V}$, $\epsilon_{V,H}$, $\epsilon_{V,V}$ の比の時間変化。 $Pr = 70$ 。水平な点線は等方乱流に対する値（下から、 $1/15, 4/15, 6/15$ ）を表す。

図 3 は、 $Pr = 70$ における四つの成分の運動エネルギー散逸率に対する割合の時間変化を示す。初期時刻では、流れは等方的であるため、等方乱流に対する理論値に極めて近い値をとるが、時刻の経過とともに、非等方性が発達することが分かる。特に、 $\epsilon_{H,V}$ の増加は顕著であり、最終時刻では運動エネルギー散逸の約 60% を水平流の鉛直せん断からの寄与が占める。

詳細は文献 [9] にゆずるが、Batchelor [1] の理論に倣い、鉛直せん断水平流によって変形する密度攪乱の時間変化を、拡散移流方程式を解くことによって求めると、図 1 (d) でみられたように、時刻の経過とともに鉛直方向にのみ微小な構造が形成されることが示される。

4. 結言

本研究では、密度成層流体における減衰乱流のプラントル数依存性を直接数値シミュレーションによって調べた。オズミドフ・スケールがコルモゴロフ・スケールよりも小さくなるまでの時刻初期では、密度成層を形成する（アクティブ）スカラーはパッシブスカラーと同様に振る舞う。一方、オズミドフ・スケールがコルモゴロフ・スケールを下回ると、コルモゴロフ・スケール程度の速度場では鉛直せん断水平流が支配的となる。その結果、高プラントル数のスカラーには、鉛直方向にのみ小スケールの構造が形成される。

謝辞

本研究成果は平成 30 年度地球シミュレータ公募課題により、海洋研究開発機構の地球シミュレータを利用して得られたものである。

文献

- [1] G. K. Batchelor, “Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid”, J. Fluid Mech. 5, pp.113-133, 1959.
- [2] C. H. Gibson, and W. H. Schwarz, “The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields”, J. Fluid Mech. 16, pp.365-384, 1963.
- [3] P. K. Yeung, D. A. Donzis, and K. R. Sreenivasan, “Simulations of three-dimensional turbulent mixing for Schmidt numbers of the order 1000”, Flow, Turbul. Combust. 72, pp.333-347, 2004.
- [4] J. J. Riley, R. W. Metcalfe, and M. A. Weissman, “Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids”, Proc. AIP Conf. on Nonlinear Properties of Internal Waves (ed. Bruce J. West), pp.79-112, 1981.
- [5] O. Métais, and J. R. Herring, “Numerical simulations of freely evolving turbulence in stably stratified fluid”, J. Fluid Mech. 202, pp.117-148, 1989.
- [6] P. Bartello, and S. M. Tobias, “Sensitivity of stratified turbulence to the buoyancy Reynolds number”, J. Fluid Mech. 725, pp. 1-22, 2013.
- [7] S. A. Orszag, and G. S. Patterson, “Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence”, Phys. Rev. Lett. 28, pp. 76-79, 1972.
- [8] C. Staquet, and F. S. Godeferd, “Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably stratified turbulence. Part 1. Flow energetics”, J. Fluid Mech. 360, pp. 295-340, 1998.
- [9] S. Okino, and H. Hanazaki, “Decaying turbulence in a stratified fluid of high Prandtl number”, J. Fluid Mech. 874, pp. 821-855, 2019.

Prandtl Number Dependence of Stratified Turbulence

Project Representative

Hideshi Hanazaki Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

Authors

Hideshi Hanazaki*¹, Shinya Okino*¹

*¹Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

Decaying turbulence in density stratified fluid with a Prandtl number up to $Pr = 70$ is investigated by the direct numerical simulation. In turbulent flow with a Prandtl number larger than unity, it is well known that the passive scalar fluctuations cascade to the scales smaller than the Kolmogorov scale, and shows the k^{-1} spectrum in the viscous-convective range, down to the Batchelor scale. In decaying stratified turbulence, the same phenomenon is initially observed for the buoyant scalar of high $Pr(= 70)$, until the Ozmidov scale becomes small and the buoyancy becomes effective even at the Kolmogorov scale. After that moment, however, the velocity components near the Kolmogorov scale begin to show strong anisotropy dominated by the vertically sheared horizontal flow which reduces the vertical scale of density fluctuations. An analysis similar to Batchelor (1959) indeed shows that the vertically sheared horizontal flow reduces the vertical scale of density fluctuations, without changing the horizontal scale.

Keywords : Stratified Fluid, Turbulence, High Prandtl Number, Energy Spectrum, Direct Numerical Simulation

1. Introduction

The atmosphere and the ocean, when temporally averaged, are stably stratified with larger density at lower height. The density stratification in the ocean is generated by salinity and temperature. The salinity, in particular, has a so small diffusion coefficient that the Prandtl number Pr is very large ($Pr = \nu^*/\kappa^* = 700$ with ν^* being the kinematic viscosity of fluid and κ^* the diffusion coefficient).

The convection of a passive (i.e. non-buoyant) scalar of high Prandtl number in isotropic turbulence was investigated in a seminal paper by Batchelor [1], who predicted that the high- $Pr(\gg 1)$ scalar dissipates at the wavenumber of $k_B^* = Pr^{1/2}k_K^*$ (k_K^* being the Kolmogorov wavenumber), and the scalar variance spectrum is proportional to k^{*-1} in the viscous-convective subrange ($k_K^* < k^* < k_B^*$). These results have been confirmed later by experiments [2] and numerical simulations [3].

On the other hand, turbulence in a density-stratified fluid has been investigated by a number of numerical simulations (e.g. [4-6]). Most of them, however, assume $Pr = 1$, so that the behaviour of the high- Pr stratifying scalar and the Pr -effect on the fluid motion have been largely unknown. In this study, we have performed direct numerical simulations of decaying turbulence with a Prandtl number up to 70 as a prerequisite to understanding the behavior of a very high- Pr active scalar like salinity ($Pr = 700$).

2. Direct numerical simulation

We consider a density-stratified fluid in a cubic region with the periodic boundary condition. Decaying turbulence in the stratified fluid, i.e. the temporal evolution of an initially prescribed perturbation, is analyzed by direct numerical simulation. As the initial condition, an isotropic velocity

distribution is given, and the salinity perturbation is set to zero.

The temporal variation of the flow is governed by the continuity equation, the Navier-Stokes equation under the Boussinesq approximation and the transport equation of the density perturbation. The governing equations are solved by the Fourier spectral method. As a time-stepping algorithm, the 4th order Runge-Kutta method is adopted. We begin the computation with 2048^3 grid points, and reduce the grid points to 1024^3 to save the computational resource after the high-wavenumber components of the salinity perturbation decay ($t = 6$).

The initial Reynolds number and the initial Froude number are fixed at $Re_0 = U_0^*L_0^*/\nu^* = 100$ and $Fr_0 = U_0^*/(N^*L_0^*) = 1$, respectively, where U_0^* is the initial rms velocity, L_0^* the initial integral scale and N^* the Brunt-Väisälä frequency determined by the mean density gradient $d\bar{\rho}^*/dz^*$. In this study, the variables without an asterisk represent the non-dimensional quantities scaled by the length scale L_0^* , the velocity scale U_0^* and the salinity scale $-L_0^*d\bar{\rho}^*/dz^*$.

3. Results

We show in figure 1(a,b) the spatial distributions of the potential energy at $t = 4$, for low and high Prandtl numbers ($Pr = 1$ and 70). At this early time, the flow is only weakly affected by buoyancy since the time in the unit of Brunt-Väisälä period is small and the Ozmidov scale is still larger than the Kolmogorov scale. There is a strong effect of the Prandtl number on the potential energy, since Pr controls the cascading process of the scalar. The potential energy distribution at $Pr = 70$ (figure 1b) has much smaller structures than that at $Pr = 1$ (figure 1a), since the Batchelor scale of the scalar with $Pr = 70$ is much smaller than that with $Pr = 1$, which is equal to the Kolmogorov scale.

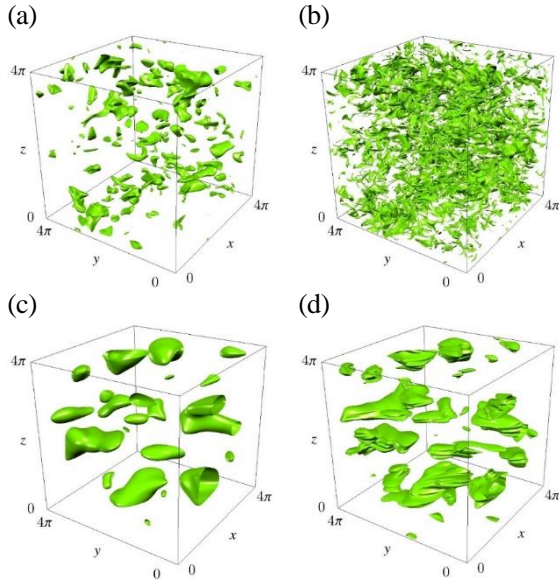


Figure 1. Spatial distributions of the potential energy at (a,b) $t = 4$ and (c,d) $t = 40$. Each figure shows the isosurfaces of (a) $\rho'^2/(2Fr_0^2) = 6PE$ at $Pr = 1$; (b) $\rho'^2/(2Fr_0^2) = 6PE$ at $Pr = 70$; (c) $\rho'^2/(2Fr_0^2) = 4PE$ at $Pr = 1$; (d) $\rho'^2/(2Fr_0^2) = 4PE$ at $Pr = 70$, where PE is the spatially averaged potential energy.

The corresponding spectrum of potential energy is shown in figure 2. The spectrum extends toward a higher wavenumber for a large Prandtl number. We should note that the potential energy spectrum at $Pr = 70$ is proportional to k^{-1} in the viscous-convective subrange ($k_K < k < k_B$). This implies that the buoyant scalar behaves like a passive scalar (cf. Batchelor[1]) unless the buoyancy affects the flow as small as the Kolmogorov scale.

As time proceeds, the Ozmidov scale becomes smaller and the buoyancy becomes dominant down to the smaller scales, including the energy-containing scale. At a much later time ($t = 40$), the isosurfaces of the potential energy have pancake structures as shown in figure 1(c,d). Since the smaller-scale fluctuations observed when $t = 4$ (figure 1a,b) have already decayed, only the large-scale structures remain. There are horizontal wrinkles on the surface of pancakes of potential energy at $Pr = 70$. These are the small-scale vertical structures observed only at high Prandtl numbers, not observed at lower Prandtl numbers. The vertical variations in density perturbation is generated by a vertical shear of the horizontal flow, which is dominant at the Kolmogorov scale (cf. [7] for more detail).

Acknowledgement

This study used computational resources provided by the Earth Simulator Center of the Japan Agency of Marine-Earth Science and Technology.

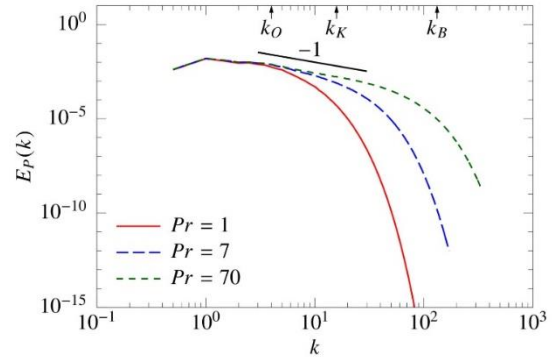


Figure 2. Prandtl number dependence of the potential energy spectrum $E_p(k)$ at $t = 4$. Arrows show the Ozmidov (k_O), Kolmogorov (k_K), and Batchelor (k_B) wavenumbers at $Pr = 70$ from left.

References

- [1] G. K. Batchelor, "Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid", J. Fluid Mech. 5, pp.113-133, 1959.
- [2] C. H. Gibson, and W. H. Schwarz, "The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields", J. Fluid Mech. 16, pp.365-384, 1963.
- [3] P. K. Yeung, D. A. Donzis, and K. R. Sreenivasan, "Simulations of three-dimensional turbulent mixing for Schmidt numbers of the order 1000", Flow, Turbul. Combust. 72, pp.333-347, 2004.
- [4] J. J. Riley, R. W. Metcalfe, and M. A. Weissman, "Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids", Proc. AIP Conf. on Nonlinear Properties of Internal Waves (ed. Bruce J. West), pp.79-112, 1981.
- [5] O. Métais, and J. R. Herring, "Numerical simulations of freely evolving turbulence in stably stratified fluid", J. Fluid Mech. 202, pp.117-148, 1989.
- [6] P. Bartello, and S. M. Tobias, "Sensitivity of stratified turbulence to the buoyancy Reynolds number", J. Fluid Mech. 725, pp. 1-22, 2013.
- [7] S. Okino, and H. Hanazaki, "Decaying turbulence in a stratified fluid of high Prandtl number", J. Fluid Mech. 874, pp. 821-855, 2019.