

減衰する密度成層乱流のシュミット数依存性

課題責任者

花崎 秀史 京都大学大学院 工学研究科

著者

花崎 秀史*1, 沖野 真也*1

*1 京都大学大学院 工学研究科

シュミット数 $Sc = 1$ から 700 までの値に対する成層乱流のシュミット数依存性を直接数値計算により調べた。塩分成層乱流 ($Sc = 700$) の減衰終期においては、密度攪乱によるポテンシャルエネルギーは、成層効果が顕著になる前に粘性移流領域で観測される k^{-1} スペクトルと異なり、平坦なスペクトルを持つ。この特徴的なスペクトルは、コルモゴロフ・スケールまたは $\sqrt{\nu^*/N^*}$ で定義される成層乱流の基本スケール (ただし、 ν^* : 流体の動粘性係数、 N^* : ブラント・バイサラ振動数) 付近のポテンシャルエネルギーが、逆勾配密度フラックスにより運動エネルギーへと持続的に変換されるために、著しく減少することによって起こる。成層乱流の基本スケール付近において顕著な逆勾配フラックスは、700 よりも小さいシュミット数においても同様に観測された。

キーワード: 成層流体, 減衰乱流, 高シュミット数, エネルギースペクトル, 直接数値計算

1. 緒言

大気や海洋は、時間平均的には下方ほど密度の大きい密度成層を形成している。海洋における密度成層を形成するのは塩分と温度であるが、特に、塩分の拡散係数は非常に小さく、拡散係数 κ^* に対する流体の動粘性係数 ν^* の比であるシュミット数は非常に大きな値をとる ($Sc = \nu^*/\kappa^* = 700$)。

等方乱流中での、流れに影響を及ぼすことなく、受動的に運動する“パッシブスカラー”のスペクトルに関する研究として Batchelor[1]が挙げられる。そこでは、 $Sc \gg 1$ のスカラーは速度場の最小スケールに対応するコルモゴロフ波数 k_K^* よりも大きなバッチェラー波数 ($k_B^* = Sc^{1/2}k_K^*$) において散逸し、粘性移流領域 ($k_K^* < k < k_B^*$) において、スカラースペクトルは波数 k^* の -1 乗に比例することが理論的に示された。

密度成層乱流、すなわち熱や塩分のように浮力を介して流れに影響を及ぼす“アクティブスカラー”が鉛直方向に平均勾配をもつ流体中の乱流について、これまで室内実験、数値計算、理論による数多くの研究がなされてきた。室内実験はしばしば塩分成層 ($Sc = 700$) を用いておこなわれてきた[2, 3, 4]が、バッチェラー波数のような微小な構造を高精度の解像することは難しい。一方、数値計算では、ほとんどの場合 $Sc = 1$ が対象とされてきた[5, 6, 7]。そのため、実用上重要な対象であるにもかかわらず、高シュミット数のアクティブスカラーの小スケールにおける振る舞いについての知見は乏しい。

そこで本報では、シュミット数が 700 までの値に対する密度成層乱流のシュミット数依存性を直接数値計算により解析した結果について述べる。

2. 直接数値計算

周期境界を有する立方体領域中の密度成層流体を取り扱う。本研究では、減衰乱流、すなわち初期攪乱の時間発

展を計算の対象とする。初期速度場として等方的な攪乱 (スペクトルの形は[8]と同様) を与え、初期密度場は攪乱がないものとした。

系を支配する方程式は、連続の式、ブジネスク近似を施したナビエ・ストークス方程式と密度攪乱の輸送方程式である。フーリエ・スペクトル法によって支配方程式の直接数値計算を実施した。非線形項の評価の際に生じるエイリアス誤差は $3/2$ 則によって除去した。また、時間積分は4次精度のルンゲ・クッタ法により実行した。計算に用いる格子点数は最大で 4096^3 点とした。

本研究では、初期レイノルズ数と初期フルード数をそれぞれ $Re_0 = U_0^*L_0^*/\nu^* = 50$, $Fr_0 = U_0^*/(N^*L_0^*) = 1$ とした。ただし、 U_0^* は初期 rms 速度、 L_0^* は初期攪乱の積分長、 N^* はブラント・バイサラ振動数であり、 N^* は平均密度勾配 $d\bar{\rho}^*/dz^*$ から決定される。シュミット数は四通りの値 ($Sc = 1, 7, 70, 700$) に対し、計算を実施した。以下では、アスタリスクなしの物理量は長さスケール L_0^* 、速度スケール U_0^* 、密度スケール $-L_0^*d\bar{\rho}^*/dz^*$ によって無次元化された量を表すものとする。

非線形項を評価する際の三次元実 FFT を MPI によって並列化した。計算領域を一方向に対して分割し、適宜データの転置をおこなって同一ノード内で FFT を実行した。格子点が 4096^3 点の場合、SX-ACE を1024ノード利用して計算を行った。

3. 結果

図1は、 $Sc = 1, 7, 70, 700$ に対するポテンシャルエネルギースペクトルの時間変化を示す。まず、最もシュミット数の大きい $Sc = 700$ の場合 (図1d) から説明する。 $t = 0$ ではポテンシャルエネルギーは零なので、初期には、運動エネルギーは鉛直密度フラックスによってポテンシャルエネルギーへと変換される。ポテンシャルエネルギーは高波数に輸送され、 $t = 4$ 程度の時刻において、コル

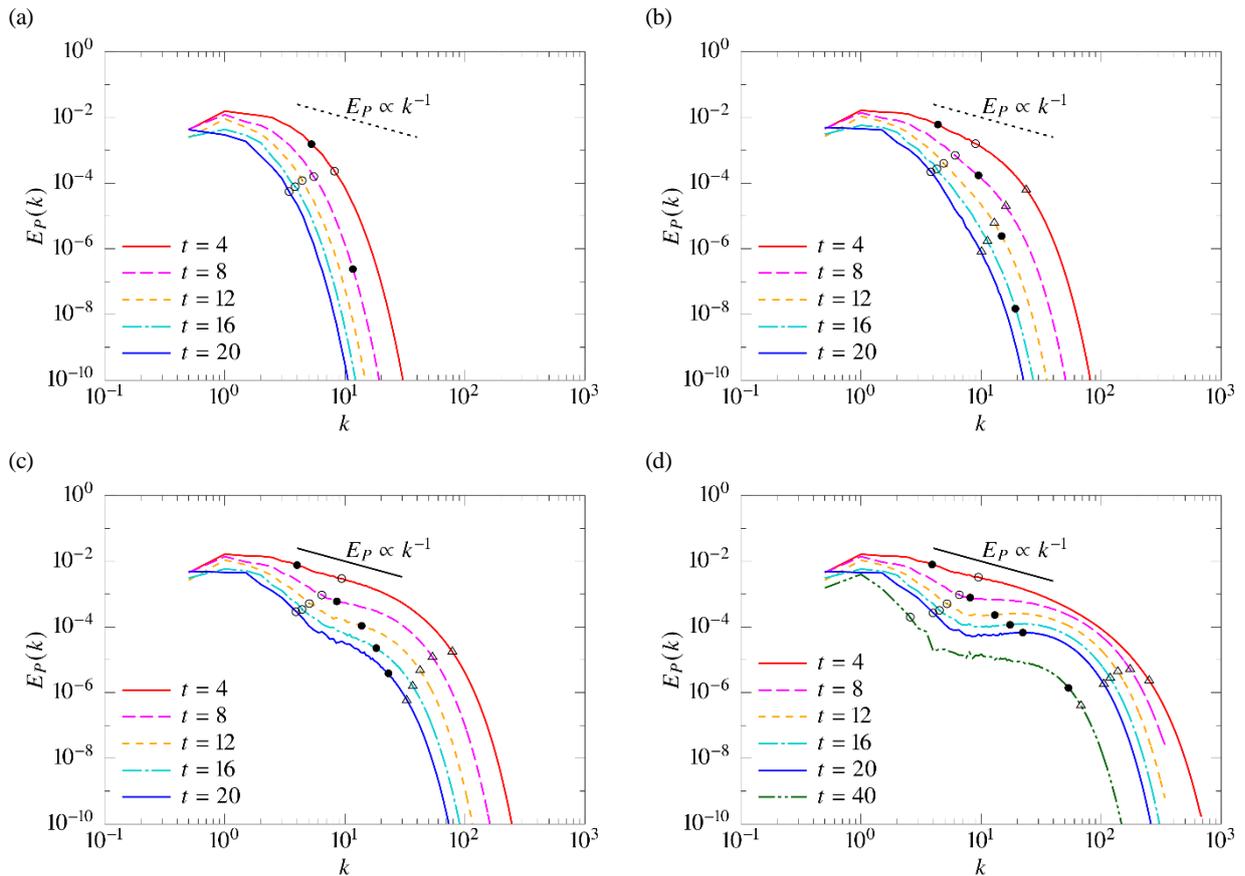


図 1. ポテンシャルエネルギースペクトル $E_p(k)$ の時間変化。(a) $Sc = 1$ 、(b) $Sc = 7$ 、(c) $Sc = 70$ 、(d) $Sc = 700$ 。スペクトル上のシンボルはコルモゴロフ波数 (○)、オズミドフ波数 (●)、およびバチェラー波数 (△) を示す。

コルモゴロフ波数付近で k^{-1} に比例したポテンシャルエネルギースペクトルが形成される。このスペクトルは、等方乱流における $Sc \gg 1$ のパッシブスカラーのスペクトルに似ている (Batchelor[1])。

しかしながら、ポテンシャルエネルギーは時間とともに減衰し、 $t = 8$ でスペクトルの曲がりが見える。同時に、スペクトルが曲がる波数 (概ね、 $k = 7$) よりも高い波数ではスペクトルは平坦になる。

減衰乱流では、運動エネルギー散逸率 ϵ_K は時間とともに減少するため、コルモゴロフ波数とバチェラー波数は時間とともに減少する一方、オズミドフ波数は増加する。やがて、コルモゴロフ波数とオズミドフ波数は、成層乱流の基本波数 $k_p^* = \sqrt{N^*/\nu^*}$ (Gibson[9]) において一致する。本計算における、成層乱流の基本波数の無次元値は $k_p = \sqrt{N^*/\nu^* L_0^*} = (Re_0/Fr_0)^{1/2} \approx 7.1$ であり、スペクトルの曲がる波数に近い。なお、成層乱流の基本波数は密度の拡散係数 κ^* に依存しないため、シュミット数 Sc にも依存しない。

このようなスペクトルの曲がり、シュミット数が低い場合 ($Sc \leq 7$) には見られない (図 1a, b)。 $Sc = 70$ (図 1c) では、ポテンシャルエネルギースペクトルは、 $t = 4$ において、コルモゴロフ波数付近で k^{-1} スペクトルを示し、その後、時刻の経過とともに $E_p(k)$ には弱い

曲がりが見られる。この傾向は、 $Re_0 = 100$ においても同様に確認できるが (Okino & Hanazaki[10]の figure 13d)、そこではスペクトルの曲がりについては議論されていなかった。ポテンシャルエネルギースペクトルが曲がる波数は $k \sim 7$ であるが、これは $Sc = 700$ の場合とほぼ同じ値である。しかし、 $Sc = 70$ における曲がり、 $Sc = 700$ よりも弱く、高波数においてスペクトルは平坦にはならない。これは、密度の分子拡散が大きく、初期のポテンシャルエネルギーの高波数への輸送量が小さいためである。

図 2 は鉛直密度フラックスのプレマルチプライド・コスpectrum $kC_{\rho'w}(k)$ の時間変化を示す。はじめ、運動エネルギーはポテンシャルエネルギーに変換されるため、初期 ($t \sim 1$) の $kC_{\rho'w}(k)$ は、初期積分長に対応する $k = 2$ 付近で正の最大値をとる。分子粘性と分子拡散の影響は低波数では小さく、それらが高波数成分に影響を与え始めるまでにはある程度の時間がかかる。そのため、 $t \leq 1$ における $kC_{\rho'w}$ は、高波数を除いて ($k \leq 10$)、すべてのシュミット数に対してほぼ同じ振舞いを示す。

その後、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの交換に伴い、コスpectrumの低波数成分 ($k \leq 4$) は零を中心に振動する。低波数では粘性や拡散が効かないため、コスpectrumの低波数成分は Sc の影響を受けず、 $Sc =$

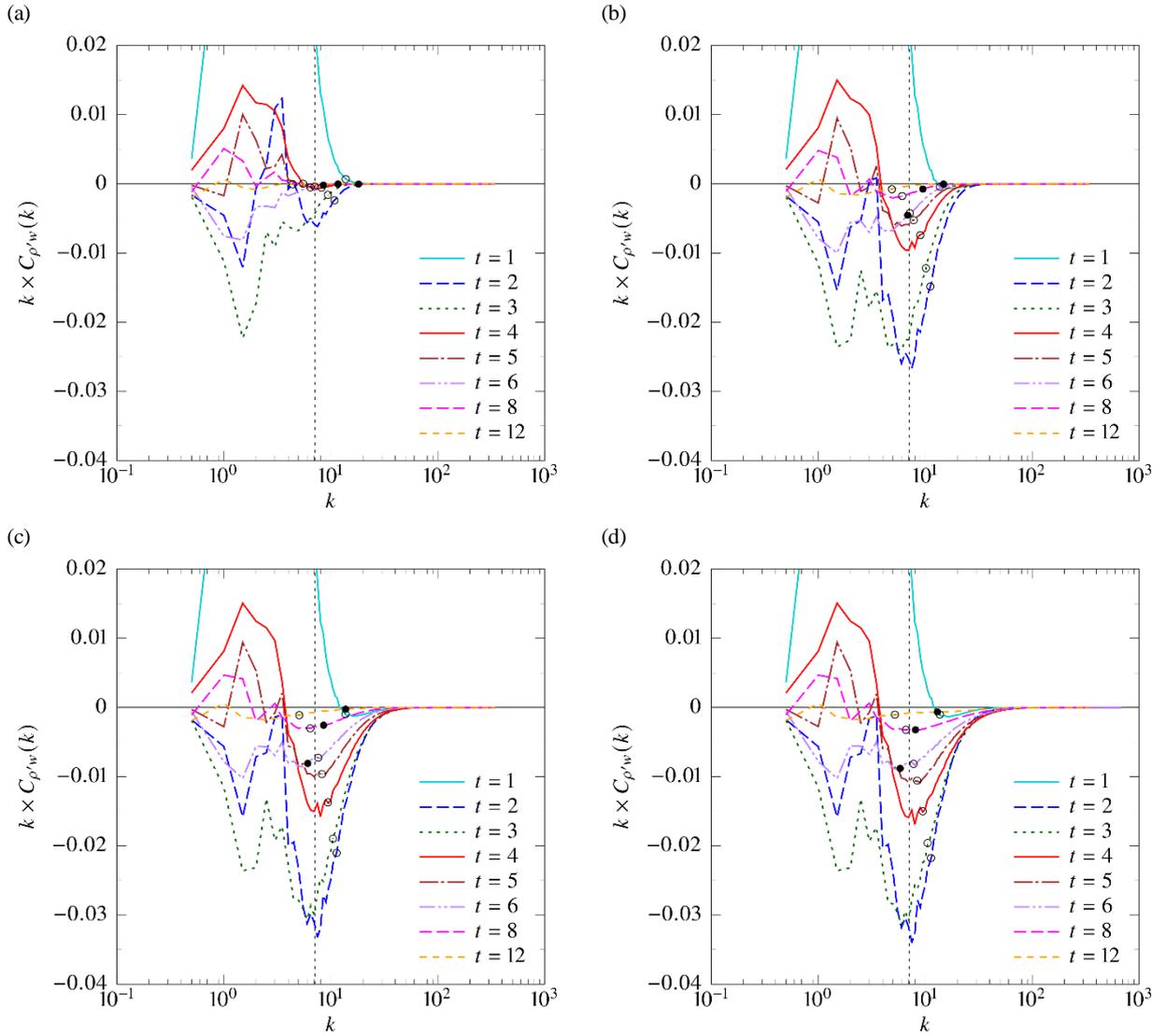


図 2. 鉛直密度フラックスのコスペクトルの時間発展。ただし、波数 k を掛けた $k \times C_{\rho'w}(k)$ を示している。(a) $Sc = 1$ 、(b) $Sc = 7$ 、(c) $Sc = 70$ 、(d) $Sc = 700$ 。白丸 (○) はコルモゴロフ波数を、黒丸 (●) は $t = 6, 8, 12$ におけるオズミドフ波数を示す。鉛直破線は成層乱流の基本波数 $k_p = \sqrt{50} \approx 7.1$ を示す。

1, 7, 70, 700 の間には大きな差は見られない。しかし、低波数での振幅は時間の経過とともに減少する。これは、エネルギーが高波数へ輸送されるためだけでなく、水平方向の波数ベクトル以外の成分がコスペクトルに寄与しなくなるためである (Hanazaki & Hunt[11])。

一方、 $k \geq 4$ におけるコスペクトルの振る舞いは Sc の影響を大きく受ける。 $Sc = 1$ (図 2a) では、全ての波数でコスペクトルの符号がほぼ同時に変化する (Gerz & Yamazaki[12]) が、 $Sc \geq 7$ (図 2b-d) では、高波数成分は振動せず、負の状態 (すなわち、逆勾配フラックス) が持続する。逆勾配フラックスの振幅は、時間とともに単調に減少するが、 Sc とともに増加する。 $Sc = 70$ と $Sc = 700$ では、コスペクトルの差は小さいが、これは低波数 ($k \leq 10$) における運動エネルギースペクトル (図は省略) とポテンシャルエネルギースペクトル (図 1) が、

シュミット数が大きい場合には、シュミット数にはあまり依存しないことを反映している。なお、逆勾配フラックスが最も強くなる波数は時間的に変化せず、成層乱流の基本波数 ($k_p = 7.1$) に近い。

4. 結言

本研究では、シュミット数 $Sc = 1$ から 700 までの値に対する成層乱流のシュミット数依存性を直接数値計算により調べた。シュミット数が大きい場合には、初期のポテンシャルエネルギースペクトルには Batchelor の k^{-1} 則が見られるが、時刻が経過し、粘性移流領域で成層効果が顕著になると、成層乱流の基本スケール付近でポテンシャルエネルギースペクトルは折れ曲がる。これは、成層乱流の基本スケール付近のポテンシャルエネルギーが、逆勾配密度フラックスにより運動エネルギーへと持続的

に変換されるためである。実際に、鉛直密度フラックスのコスペクトルは、シュミット数によらず、成層乱流の基本波数付近で負の極小値をとる。

謝辞

本研究成果は平成31年度地球シミュレータ公募課題により、海洋研究開発機構の地球シミュレータを利用して得られたものである。

文献

- [1] G. K. Batchelor, "Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid", *J. Fluid Mech.* 5, pp.113-133, (1959).
- [2] D. C. Stillinger, K. N. Helland, and C. W. Van Atta, "Experiments on the transition of homogeneous turbulence to internal waves in a stratified fluid," *J. Fluid Mech.* 131, pp. 91-122, (1983).
- [3] E. C. Itsweire, K. N. Helland, and C. W. Van Atta, "The evolution of grid-generated turbulence in a stably stratified fluid," *J. Fluid Mech.* 162, pp. 299-338, (1986).
- [4] O. Praud, A. M. Fincham, and J. Sommeria, "Decaying grid turbulence in a strongly stratified fluid," *J. Fluid Mech.* 522, pp. 1-33, (2005).
- [5] J. J. Riley, R. W. Metcalfe, and M. A. Weissman, "Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids", *Proc. AIP Conf. on Nonlinear Properties of Internal Waves* (ed. Bruce J. West), pp.79-112, (1981).
- [6] P. Bartello, and S. M. Tobias, "Sensitivity of stratified turbulence to the buoyancy Reynolds number", *J. Fluid Mech.* 725, pp. 1-22, (2013).
- [7] A. Maffioli, and P. A. Davidson, "Dynamics of stratified turbulence decaying from a high buoyancy Reynolds number," *J. Fluid Mech.* 786, pp. 210-233, (2016).
- [8] C. Staquet, and F. S. Godeferd, "Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably stratified turbulence. Part 1. Flow energetics", *J. Fluid Mech.* 360, pp. 295-340, (1998).
- [9] C. H. Gibson, "Fossil temperature, salinity, and vorticity turbulence in the ocean", *Marine Turbulence* (ed. J. Nihoul), pp. 221-257, (1980).
- [10] S. Okino, and H. Hanazaki, "Decaying turbulence in a stratified fluid of high Prandtl number", *J. Fluid Mech.* 874, pp. 821-855, (2019).
- [11] H. Hanazaki, and J. C. R. Hunt, "Linear processes in unsteady stably stratified turbulence," *J. Fluid Mech.* 318, pp. 303-337, (1996).
- [12] T. Gerz, and H. Yamazaki, "Direct numerical simulation of buoyancy-driven turbulence in stably stratified fluid," *J. Fluid Mech.* 249, pp. 415-440, (1993).

Schmidt Number Dependence of Decaying Stratified-turbulence

Project Representative

Hideshi Hanazaki Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

Authors

Hideshi Hanazaki*¹, Shinya Okino*¹

*¹Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

We have investigated decaying stratified turbulence for Schmidt numbers ranging from $Sc = 1$ to 700 by direct numerical simulations. In the final period of decay of stratified turbulence in saltwater ($Sc = 700$), the potential energy pertaining to the density fluctuation has a ‘flat spectrum’ in the viscous-convective subrange, rather than a k^{-1} spectrum usually observed when the stratification effect is insignificant. This particular spectrum appears since the potential energy near the Kolmogorov scale or the primitive scale of stratified turbulence decreases significantly due to the persistent conversion of potential energy into kinetic energy by the counter-gradient density flux, where the primitive scale is defined by $\sqrt{\nu^*/N^*}$, with ν^* being the kinematic viscosity and N^* the Brunt-Väisälä frequency.

Keywords : Stratified Fluid, Decaying Turbulence, High Schmidt Number, Energy Spectrum, DNS

1. Introduction

The atmosphere and the ocean, when temporary averaged, are stably stratified with larger density at lower height. The density stratification in the ocean is generated by salinity and temperature. The salinity, in particular, has a so small diffusion coefficient that the Schmidt number Sc is very large ($Sc = \nu^*/\kappa^* = 700$ with ν^* being the kinematic viscosity of fluid and κ^* the diffusion coefficient).

The convection of a passive (i.e. non-buoyant) scalar of high Schmidt number in isotropic turbulence was investigated in a seminal paper by Batchelor [1], who predicted that the high- $Sc (\gg 1)$ scalar dissipates at the wavenumber of $k_B^* = Sc^{1/2}k_K^*$ (k_K^* being the Kolmogorov wavenumber), and the scalar variance spectrum is proportional to k^{*-1} in the viscous-convective subrange ($k_K^* < k^* < k_B^*$).

Turbulence in a density-stratified fluid has been investigated by a number of experiments (e.g. [2-4]) and numerical simulations (e.g. [4-6]). Saltwater ($Sc = 700$) has been often used in the experiment of density-stratified flow, whereas most of the numerical studies assume $Sc = 1$ because of the difficulty in resolving a small Batchelor scale of the high- Sc stratifying (i.e. buoyant) scalar.

In this study, we have performed direct numerical simulations of decaying turbulence with a Schmidt number up to 700 to understand the behavior of a very high- Sc buoyant scalar.

2. Direct numerical simulation

We consider a density-stratified fluid in a cubic region with the periodic boundary condition. Decaying turbulence in the stratified fluid is analyzed by direct numerical simulation. The initial velocity field is isotropic, but the initial density perturbation is absent.

The temporal variation of the flow is governed by the

continuity equation, the Navier-Stokes equation under the Boussinesq approximation and the transport equation of the density perturbation. The governing equations are solved by the Fourier spectral method.

The initial Reynolds number and the initial Froude number are fixed at $Re_0 = U_0^*L_0^*/\nu^* = 50$ and $Fr_0 = U_0^*/(N^*L_0^*) = 1$, respectively, where U_0^* is the initial rms velocity, L_0^* the initial integral scale and N^* the Brunt-Väisälä frequency determined by the mean density gradient $d\bar{\rho}^*/dz^*$. The variables without an asterisk represent the non-dimensional quantities scaled by the length scale L_0^* , the velocity scale U_0^* and the density scale $-L_0^*d\bar{\rho}^*/dz^*$.

3. Results

Figure 1 shows a time development of the radial spectrum of potential energy $E_p(k)$ for $Sc = 1, 7, 70$ and 700. When $Sc = 700$ (figure 1d), a potential-energy spectrum proportional to k^{-1} is generated near the Kolmogorov wavenumber at $t = 4$. This initial spectrum is similar to a variance spectrum of a passive scalar of $Sc \gg 1$ in isotropic turbulence [1].

However, the potential energy decays with time, and bending of the spectrum appears at $t = 8$. At the same time, the spectrum becomes flat at wavenumbers higher than the wavenumber at which the spectrum bends, which is approximately $k = 7$ for the period of $8 \leq t \leq 20$.

In decaying turbulence, the Kolmogorov wavenumber decreases with time, while the Ozmidov wavenumber increases. Then, the Kolmogorov wavenumber and the Ozmidov wavenumber coincide ($k_K^* = k_O^*$) at the primitive wavenumber of stratified turbulence $k_p^* = \sqrt{N^*/\nu^*}$ [8] in due course. In the present numerical simulations, its nondimensional value is $k_p = (Re_0/Fr_0)^{1/2} = 7.1$. Therefore, as far as we can identify from figure 1(d), the bend of the spectrum appears near the primitive

wavenumber. The primitive wavenumber k_p is constant in time since it is determined by the stratification N^* and the viscosity ν^* . Also, k_p does not change with the Schmidt number Sc since it is independent of the diffusion coefficient of density κ^* .

Such bending of the spectrum is not observed at low Schmidt numbers ($Sc \leq 7$; figure 1a,b). However, when Sc increases to 70 (figure 1c), a weak bending of $E_p(k)$ is observed at $k \simeq 7$ after the k^{-1} spectrum is generated.

The bending of the potential energy spectrum is caused by the counter-gradient density flux persistently peaking at $k = k_p$, which converts potential energy into kinetic energy [9].

Acknowledgement

This study used computational resources provided by the Earth Simulator Center of the Japan Agency of Marine-Earth Science and Technology.

References

- [1] G. K. Batchelor, "Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid", J. Fluid Mech. 5, pp.113-133, (1959).
 [2] D. C. Stilling, K. N. Helland, and C. W. Van Atta, "Experiments on the transition of homogeneous turbulence to internal waves in a stratified fluid," J. Fluid Mech. 131, pp. 91-122, (1983).

- [3] E. C. Itsweire, K. N. Helland, and C. W. Van Atta, "The evolution of grid-generated turbulence in a stably stratified fluid," J. Fluid Mech. 162, pp. 299-338, (1986).
 [4] O. Praud, A. M. Fincham, and J. Sommeria, "Decaying grid turbulence in a strongly stratified fluid," J. Fluid Mech. 522, pp. 1-33, (2005).
 [5] J. J. Riley, R. W. Metcalfe, and M. A. Weissman, "Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids", Proc. AIP Conf. on Nonlinear Properties of Internal Waves (ed. Bruce J. West), pp.79-112, (1981).
 [6] P. Bartello, and S. M. Tobias, "Sensitivity of stratified turbulence to the buoyancy Reynolds number", J. Fluid Mech. 725, pp. 1-22, (2013).
 [7] A. Maffioli, and P. A. Davidson, "Dynamics of stratified turbulence decaying from a high buoyancy Reynolds number," J. Fluid Mech. 786, pp. 210-233, (2016).
 [8] C. H. Gibson, "Fossil temperature, salinity, and vorticity turbulence in the ocean", Marine Turbulence (ed. J. Nihoul), pp. 221-257, (1980).
 [9] S. Okino, and H. Hanazaki, "Direct numerical simulation of turbulence in a salt-stratified fluid", J. Fluid Mech. 891, A20, (2020).

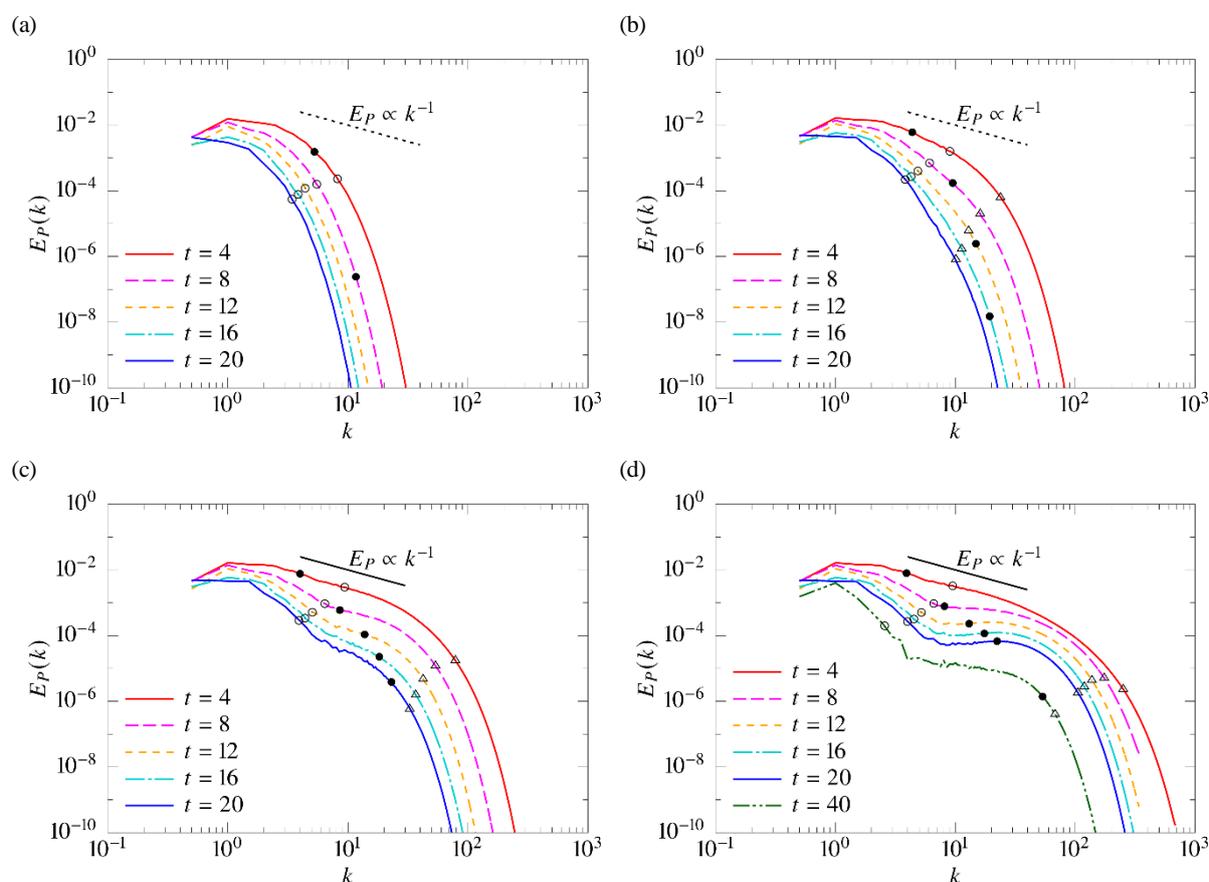


Figure 1. Time development of potential-energy spectrum $E_p(k)$ for (a) $Sc = 1$, (b) $Sc = 7$, (c) $Sc = 70$ and (d) $Sc = 700$. The symbols show the Kolmogorov wavenumber (\circ), Ozmidov wavenumber (\bullet) and Batchelor wavenumber (\triangle).