

高レイノルズ数乱流における凍結乱流仮説の検証

課題責任者

辻 義之 名古屋大学

著者

山本 義暢*¹, 恒吉 達矢*², Ali Mehrez*²*¹山梨大学工学部, *²名古屋大学工学部

高レイノルズ数壁乱流場における大規模数値計算の実施と時空間(4次元)データベースの構築をおこない、凍結乱流仮説の検証をおこなった。乱流中の大規模構造が、凍結乱流仮説に与える影響を調べ、乱流構造が凍結仮説の成立に果たす役割を調べる研究をおこなっている。凍結乱流仮説は速度変動ばかりではなく、変動圧力に対しても成り立つのかを明らかにした。室内実験よる時系列データを空間データに変換できる基準を示し、計測データの有効活用方法を考察する。

キーワード：壁乱流, 高レイノルズ数, 凍結乱流仮説, 移流速度, 変動圧力

1. はじめに

多くの観測や実験では、空間中に固定されたプローブからの時系列信号が計測され、流動の様子が把握されている。しかし、時系列信号には空間情報が含まれていないため、複雑な流況を理解することはできない。1938年 G. I. Taylor は、時間信号から空間変動への変換を可能にする「凍結乱流仮説」を提示した[1]。この仮説が統計的に正しければ、もしくは仮説が成立するための前提条件を明らかにできれば、気象観測や室内実験における定点観測(時系列)データから空間変動が予測可能となり、室内でのモデル実験や大気・海洋中の輸送機器周りの流れを予測する実用的観点への貢献が期待される。仮説の検証には、高レイノルズ数における空間データを長時間にわたり取得する必要があるが、実験や観測からこのようなデータを取得することは不可能であり、直接数値計算による高レイノルズ数データベースが唯一この仮説を検証する手段となる[2-5]。

本研究では、異分野の研究者が協力することならびに、スパコンの大規模計算が不可欠である。乱流レイノルズ数 2000 程度(現段階で最高クラス)の高レイノルズ数の直接数値計算には、最低でも実行演算速度で TFLOPS 級/実メモリで TB 級の高速・大規模容量が必要である。また、今回の課題では、非等方せん断乱流場の大規模時空間構造解析を実行する。従って、データベース量、約 140TB 程度の時空間データの統計・可視化解析が必須である。計算規模・データベース量ともにやはり、世界最大クラスとなる。本解析結果や工学実現象、及び室内実験の結果を勘案すると、さらに数倍高い、乱流レイノルズ数 4000-8000 程度の高レイノルズ数を解析する必要があり、数百 TFLOPS/数百 TB 級への拡張が必須となる。データベース量に関してはペタ級となる。従って、本課題の実行及び大規模データのハンドリングの実績を得ることは、最低条件である。凍結乱流仮説を大規模な数値計算データに基づき直接検証した研究は、ほとんどない。数値計算と同体系の実験データとの直接比較をおこなった例は皆無である。

2. 数値計算およびデータ解析手法

解析対象は、一定の圧力勾配で駆動される 2 次元チャンネル乱流場である。図 1 に解析領域を示す。x を主流方向、y を壁垂直方向、z をスパン方向とする。基礎方程式は、非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式及び連続式とし、擬スペクトル法に基づき計算が行われている。離散化手法は、主流及びスパン方向にフーリエスペクトル法、壁垂直方向に 2 次精度の中心差分を使用し、主流及びスパン方向へのエイリアジング誤差は位相シフト法によりこれを除去してある。位相シフト法とはフーリエ空間上において位相を変化させた関数と本来の関数の和をとることにより、エイリアジング誤差を除去する手法である。時間進行は、対流項に 3 次精度 Runge-Kutta 法、粘性項に Crank-Nicolson 法、圧力項に Euler 陰解法を使用し、境界条件は、主流及びスパン方向に周期境界条件、壁面で no-slip 条件を課してある。計算格子には直交格子を用いており、主流方向、スパン方向には等間隔に格子を配置している。壁垂直方向には壁面近傍における粘性の影響を考慮するために、壁近くにかけてメッシュを細かくしてある。計算条件は $Re_\tau = 158, 500, 2000$ である。各レイノルズ数における解析対象の x, y, z 方向の計算領域(L_x, L_y, L_z), 格子点数(N_x, N_y, N_z)を表 1 に示す。

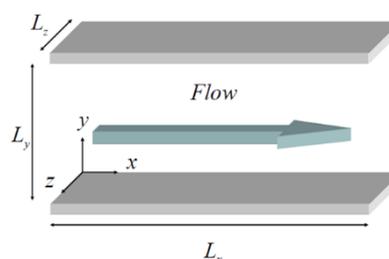


図 1 計算対象のとなるチャンネル乱流場

DNS データベースには速度 3 成分(主流方向速度, 壁垂直方向速度, スパン方向速度)と圧力のデータが保存されている。各々の成分について 3 次元の空間データが時系

列方向に保存されており、時間方向データ数を n_t とすると、data_1~data_ n_t というディレクトリが存在している。また、時間番号を示すディレクトリ配下には壁垂直方向 (y) の 2 次元平面 (x, z) のデータが壁垂直方向の昇順に保存してある。

表 1 数値計算条件

Re_τ	$L_x/h, L_y/h, L_z/h$	N_x, N_y, N_z	$\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$
180	25.6, 2, 9.6	384, 192, 256	12, 0.3-3.8, 6.7
500	25.6, 2, 9.6	800, 384, 600	16, 0.4-5.3, 8
2000	25.6, 2, 9.6	3200, 1024, 2400	16, 0.6-8, 8

凍結乱流仮説の検証は、周波数スペクトル (式(1)) と波数スペクトル (式(2)) を比較することで行った。スペクトルは、壁からの距離 y の位置で計算される。変動圧力のスペクトルを以下のように定義する。

$$E_{pp}(k_x, y) = \langle \hat{p}(k_x, y, z, t) \hat{p}^*(k_x, y, z, t) \rangle_{z,t}, \quad (1)$$

$$E_{pp}(\omega, y) = \langle \hat{p}(x, y, z, \omega) \hat{p}^*(x, y, z, \omega) \rangle_{z,x}. \quad (2)$$

移流速度を局所の平均速度 $U(y)$ に等しくおくのが、凍結乱流仮説であり、凍結乱流仮説から算出されるスペクトルが式(3)となる。

$$E_{pp}^F(k_x, y) = U(y) E_{pp}(\omega, y). \quad (3)$$

凍結乱流仮説が正しければ、式(1)と式(3)から算出されるスペクトルが等しいこととなる。ただし、式中の記号 ($\hat{\quad}$) は、変動量のフーリエ成分、* は複素共役成分を表し、記号 $\langle \quad \rangle_{z,t}$ と $\langle \quad \rangle_{z,x}$ は z 方向、 x 方向および時間に関するアンサンブル平均を表す。 k_x と k_z は各方向への波数であり、波長は $\lambda_x (= 2\pi/k_x)$, $\lambda_z (= 2\pi/k_z)$ となる。 ω は時間周波数である。変動圧力に対する移流速度 $C_p(y)$ は、Del Álamo and Jiménez [4] に従うと、次式で与えられる。

$$C_p(y) = \langle -(\partial p / \partial t)(\partial p / \partial x) \rangle_z / \langle (\partial p / \partial x)^2 \rangle_z. \quad (4)$$

3. 結果及び考察

図 2(a) には、壁近くの $y^+ = 15$ ($Re_\tau = 2000$) における 1 次元の premultiplied spectrum を示した。図中の青い波線は、式(1)から計算される変動圧力の波数スペクトル $k_x E_{pp} / \rho^2 u_\tau^4$ であり、黒の実線は凍結仮説によって式(3)から算出されるスペクトル $k_x E_{pp}^F / \rho^2 u_\tau^4$ を示す。両者はおおむね一致しているが、詳細にみると、小さなスケールでは凍結仮説は過大評価、大きなスケールでは過小評価をしていることがわかる。つまり、変動圧力に関しては、壁近くで凍結乱流仮説は成り立たないことがわかる。

定量的に比較のために相対誤差 $D_{pp}(k_x, y)$ [4] を図 2(b) に示した。図中の赤色、青色、緑色、マゼンタの実線は各々壁からの位置が $y^+ = 5, 15, 27, 200$ の結果を表す。壁近くの $y^+ = 5$ においては、小さなスケールでの相

対誤差は約 20% にもおよぶ。一方、壁から離れた位置 $y^+ = 200$ においては、ほぼすべての波数において相対誤差は 5% 以下であり、凍結仮説はよい近似と考えられる。

移流速度を局所平均速度に等しいとするのではなく、より適切な移流速度を用いることで、時間周波数スペクトルと波数スペクトルを相互に変換できることが可能となる。そのためには、より適切な移流速度 $C_p(y)$ を見積もることが必要であり、今後の課題となる。

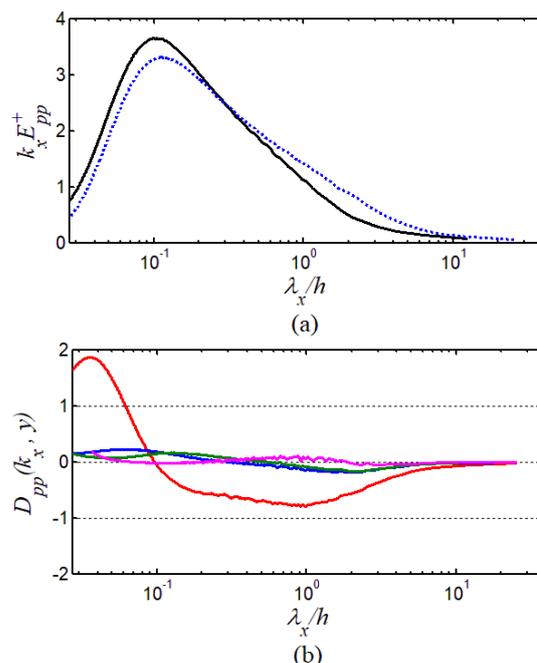


Fig. 2(a) 壁近くの $y^+ = 15$ ($Re_\tau = 2000$) における 1 次元の premultiplied spectrum. 青い波線は、式(1)から計算される変動圧力の波数スペクトル $k_x E_{pp} / \rho^2 u_\tau^4$ であり、黒の実線は凍結仮説によって式(3)から算出されるスペクトル $k_x E_{pp}^F / \rho^2 u_\tau^4$ を表す。(b) 相対誤差 $D_{pp}(k_x, y) = k_x (E_{pp}^F(k_x, y) - E_{pp}(k_x, y)) / \max[k_x E_{pp}(k_x, y)]$ 。色の違いは $y^+ = 5$ (red), 15 (blue), 27 (green), and 200 (magenta) $Re_\tau = 2000$ である。

References

- [1] G. I. Taylor, *Proc R Soc Lon Ser-A*, 164, (1938b), 476-490.
- [2] N. Hutchins & I. Marusic, *J. Fluid Mech.*, 579, (2007a), 1-28.
- [3] J. Kim & F. Hussain, *Phys. Fluids A-Fluid.*, 5, (1993), 695-706.
- [4] J. C. Del Álamo & J. Jiménez, *J. Fluid Mech.*, 640, (2009), 5-26.
- [5] C. Geng, G. He, Y. Wang, C. Xu, A. Lozano-Durán & J. M. Wallace, *Phys. Fluids.*, 27, (2015), 025111.

Frozen Turbulent Hypothesis in High Re Number Turbulent Boundary Layer

Project Representative

Yoshiyuki Tsuji School of Engineering, Nagoya University

Authors

Yoshinobu Yamamoto*¹, Tatsuya Tsuneyoshi*², Ali Meherz*²

*¹Department of Engineering, Yamanashi University, *²School of Engineering, Nagoya University*²

Datasets from Direct Numerical Simulation (DNS) of turbulent channel flow up to Reynolds number 2000, based on the channel half-depth h and the friction velocity u_τ , are utilized to examine the applicability of Taylor's hypothesis for the pressure fluctuations as well as to estimate the pressure convection velocity. The results show that the hypothesis is applicable above the wall-normal location of around 20 normalized in wall units.

Keywords : wall-turbulence, high-Re number turbulence, frozen-flow hypothesis, convection velocity, pressure fluctuation

pressure fluctuation

1. Introduction

By a time-space transformation for the derivatives, temporal data can be presented in a spatial frame of the coordinates. This is Taylor's frozen hypothesis [1] which is often used in the experimental measurements to explore the large-scale structures in turbulent flows [2]. Taylor's hypothesis has been discussed for the velocity fields in channel flow from DNS [3-5]. However, for the pressure field, the situation is different. Only Kim and Hussain [3] examined the hypothesis for the pressure fluctuations at relatively low Reynolds number. In the present study, we discuss the hypothesis for the pressure field as well as the pressure convection velocity at high Reynolds numbers.

2. Method

In the present study, DNS database of fully developed turbulent flow between two parallel planes is employed for the analysis. The incompressible Navier–Stokes equations are spatially discretized by a Fourier spectral method in the wall-parallel directions and via a second-order central difference method in the wall-normal direction. The convection, viscous and pressure terms are time-advanced by the third-order accurate Runge–Kutta method, the Crank–Nicolson method, and the implicit Euler method, respectively. Poisson's equation for the pressure is solved by the two-dimensional fast Fourier transform scheme and a tridiagonal matrix algorithm. Details of the DNS database are presented in table 1. Periodic boundary conditions are applied in x and z directions, and no-slip/no-penetration boundary conditions are imposed on the velocities at the wall. The grid spacing is uniform in the streamwise and spanwise directions and is refined near the wall in y direction to account for the large velocity gradient there. Hence, a

hyperbolic tangent algebraic equation is applied for the grid spacing in y direction.

Table 1 Numerical conditions.

Re_τ	$L_x/h, L_y/h, L_z/h$	N_x, N_y, N_z	$\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$
180	25.6, 2, 9.6	384, 192, 256	12, 0.3-3.8, 6.7
500	25.6, 2, 9.6	800, 384, 600	16, 0.4-5.3, 8
2000	25.6, 2, 9.6	3200, 1024, 2400	16, 0.6-8, 8

Friction Reynolds number $Re_\tau = hu_\tau/\nu$, computational domain L , grid number N , and spatial resolution Δ in x , y , and z directions, respectively. $\Delta^+ = u_\tau \Delta/\nu$, and ν is kinematic viscosity.

Statistically, the hypothesis can be verified for the pressure fluctuations by analyzing the spectra. The one-dimensional (1D) streamwise wavenumber (true spectra) and frequency spectra are computed at each wall-normal location respectively as

$$E_{pp}(k_x, y) = \langle \hat{p}(k_x, y, z, t) \hat{p}^*(k_x, y, z, t) \rangle_{z,t}, \quad (1)$$

$$E_{pp}(\omega, y) = \langle \hat{p}(x, y, z, \omega) \hat{p}^*(x, y, z, \omega) \rangle_{z,x}. \quad (2)$$

Using the frequency spectra, the frozen spectra can be evaluated as

$$E_{pp}^F(k_x, y) = U(y)E_{pp}(\omega, y). \quad (3)$$

The verification of the hypothesis is implemented by comparing the true and frozen spectra given by Eqs. (1) and (3), respectively. In the above equations, the hat ($\hat{\cdot}$) denotes the Fourier transform of the turbulent fluctuations with the superscript (*) denoting the complex conjugate. k_x and k_z represent the streamwise and spanwise wavenumbers, with $\lambda_x (= 2\pi/k_x)$ and $\lambda_z (= 2\pi/k_z)$

being the corresponding wavelengths, respectively, and ω is the angular frequency. $\langle \rangle_{z,t}$ and $\langle \rangle_{z,x}$ indicate averaging over z direction and time for the former, and over the wall-parallel directions for the later. $U(y)$ represents the local mean velocity. The Taylor wavenumber for the frozen spectra is defined as $k_{x^F} = \omega/U(y)$. In estimating the average value of the convection velocity for the pressure field $C_p(y)$, the scheme presented by Del Álamo and Jiménez [4] is followed where $C_p(y)$ is evaluated as

$$C_p(y) = \langle -(\partial p/\partial t)(\partial p/\partial x) \rangle_z / \langle (\partial p/\partial x)^2 \rangle_z. \quad (4)$$

3. Results and Discussion

Figure 1(a) shows the 1D premultiplied true spectrum $k_x E_{pp} / \rho^2 u_\tau^4$ (highlighted by the dotted blue line) and frozen one $k_{x^F} E_{pp^F} / \rho^2 u_\tau^4$ (highlighted by the black line) for the pressure fluctuations at $y^+ = 15$ at $Re_\tau = 2000$. Generally, the true and frozen spectra appear qualitatively similar. However, a deviation between the two spectra can be discerned. It is observed that the frozen spectrum overestimates the true one for small scales of motion, while an underestimation is observed for larger scales of motion. This deviation indicates that Taylor's hypothesis is not applicable for the pressure fluctuations at this location from the wall.

To investigate the applicability of the hypothesis for the pressure fluctuations across the channel, the difference (relative error) $D_{pp}(k_x, y)$ [4] between the true and frozen spectra of the pressure fluctuations at four wall-normal locations $y^+ = 5$ (red), 15 (blue), 27 (green), and 200 (magenta) are shown in Fig. 1(b). Away from the wall ($y^+ > 20$), the relative error between the two spectra is very small. It is almost zero for all scales of motion at $y^+ = 200$. Hence, Taylor's hypothesis can be applied within this region. On the other hand, in the near-wall region ($y^+ \leq 20$), the hypothesis seems to be invalid as the relative error is high. As shown in the figure, it approaches around 20% at $y^+ = 5$.

As shown in Fig. 1, Taylor's hypothesis is inapplicable for the pressure field in the near-wall region. Thus, a correction to the hypothesis is implemented. The pressure convection velocity on its average value $C_p(y)$ is evaluated using Eq. (4) for $Re_\tau = 180$ and 500. From the wall up to $y^+ \approx 10$, the convection velocity is higher than the mean velocity being nearly constant with values of around $12.05u_\tau$ ($0.66U_c$, where U_c is the channel centerline velocity) and $11.3u_\tau$ ($0.55U_c$) for $Re_\tau = 180$ and 500, respectively. From $y^+ \approx 10$ to $y^+ \approx 20$, the convection velocity increases slightly till it becomes equal to U^+ at $y^+ \approx 20$. Beyond that location,

the convection velocity is almost identical with the local mean velocity, being slightly lower than U^+ .

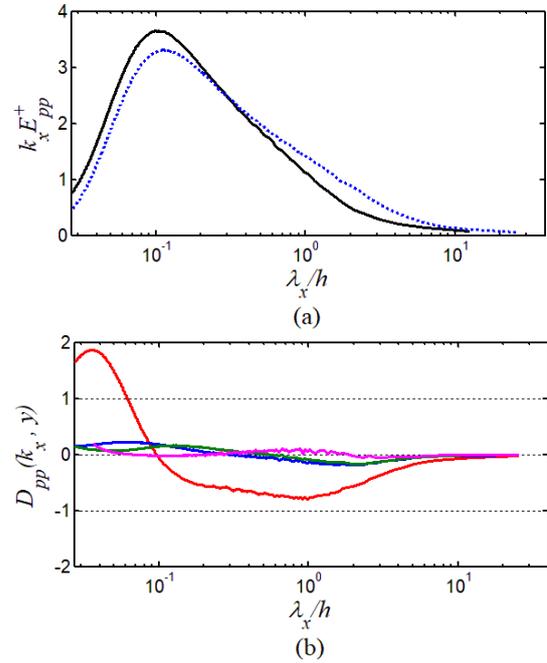


Fig. 1 Premultiplied true (blue) and frozen (black) spectra of the pressure fluctuations, versus λ_x/h at $y^+ = 15$ at $Re_\tau = 2000$. Pressure spectra are normalized as $E_{pp}^+ = E_{pp}/\rho^2 u_\tau^4$. (b) The difference between the true and frozen spectra of the pressure fluctuations $D_{pp}(k_x, y) = k_x (E_{pp^F}(k_x, y) - E_{pp}(k_x, y)) / \max[k_x E_{pp}(k_x, y)]$ versus λ_x/h at $y^+ = 5$ (red), 15 (blue), 27 (green), and 200 (magenta) at $Re_\tau = 2000$.

4. Concluding Remarks

The applicability of Taylor's hypothesis of the pressure fluctuations as well as the pressure convection velocity in channel flows up to $Re_\tau = 2000$ have been discussed. Statistically, Taylor's frozen hypothesis is inapplicable in the near-wall region (from the wall up to $y^+ \approx 20$). Close to the wall, the relative error between the frozen and true premultiplied spectra is of order 20%.

References

- [1] G. I. Taylor, *Proc R Soc Lon Ser-A*, 164, (1938b), 476-490.
- [2] N. Hutchins & I. Marusic, *J. Fluid Mech.*, 579, (2007a), 1-28.
- [3] J. Kim & F. Hussain, *Phys. Fluids A-Fluid.*, 5, (1993), 695-706.
- [4] J. C. Del Álamo & J. Jiménez, *J. Fluid Mech.*, 640, (2009), 5-26.
- [5] C. Geng, G. He, Y. Wang, C. Xu, A. Lozano-Durán & J. M. Wallace, *Phys. Fluids.*, 27, (2015), 025111.