

Fig. 2 Instantaneous snapshots of (a) absolute value of the vorticity on the  $x$ - $y$  plane, (b) pressure on the  $x$ - $y$  plane, (c) scalar on the  $x$ - $y$  plane, and (d) scalar on the  $x$ - $z$  plane.

は、無次元化された非圧縮性流体に対する連続の式、Navier-Stokes 方程式およびスカラー輸送方程式である。数値解法には、フラクショナル・ステップ法を用いた。時間進行には、三次精度のルンゲ・クッタ法およびクランク・ニコルソン法を用いた。空間離散化には、 $x$ ,  $z$  方向に四次精度中心差分、 $y$  方向に二次精度中心差分を用いた。

### 3. シミュレーション結果

図 2(a), (b) に、 $x$ - $y$  断面( $z = 0$ ) における瞬時の渦度の絶対値および瞬時圧力の分布を示す。また図 2(c), (d) に、それぞれ  $x$ - $y$  断面( $z = 0$ ) における瞬時スカラー濃度、 $x$ - $z$  断面( $y = 0$ ) における瞬時スカラー濃度の分布を示す。ここで、図はすべて同じ時間ステップにおける分布であり、縦軸および横軸は計算領域の鉛直方向長さ  $L$  で無次元化されている。図 2(a), (c) より、下流に進むにしたがって混合層厚さが増大し、小規模な渦が生成されていく様子が確認できる。また図 2(b) より、 $xL < 4.0$  の領域で正の値と負の値が交互に現れていることが確認できる。これは、大規模渦構造の存在を示しており、負の値が渦を、正の値が渦の引き伸ばし部分を表している。 $xL > 4.0$  の領域では一様な分布となり、明確な大規模渦の存在は確認できない。また速度変動強度や乱流減衰係数の主流方向分布などの乱流統計量を調べた結果、本研究で対象としている混合層では  $xL < 1.5$  の領域が未発達領域、 $1.5 < xL < 3$  の領域が発達遷移領域、 $xL > 3$  の領域が完全発達領域であることが明らかになった。この結果を踏まえて、以下では  $xL = 2$  付近および  $xL = 5$  付近での解析を行う。

### 4. 異なる渦スケール間での乱流エネルギーおよびスカラー輸送

Karman-Howarth-Monin-Hill (KHMH) 方程式は構造関数の時間発展方程式であるが、空間中の二点における

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \overline{\delta q^2}}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\overline{U}_k + \overline{U}'_k}{2} \right) \frac{\partial \overline{\delta q^2}}{\partial X_k}}_{4A} + \underbrace{\frac{\partial \overline{\delta u_k \delta q^2}}{\partial r_k}}_{4\Pi} + \underbrace{\frac{\partial U_k \overline{\delta q^2}}{\partial r_k}}_{4\Pi_U} \\
 & = \underbrace{-\frac{2}{\rho} \frac{\partial \overline{\delta u_k \delta p}}{\partial X_k}}_{4T_p} - \underbrace{2 \overline{\delta u_i \delta u_k} \frac{\partial \overline{\delta U_i}}{\partial r_k}}_{4P} - \underbrace{(\overline{u_k + u'_k}) \overline{\delta u_i} \frac{\partial \overline{\delta U_i}}{\partial X_k}}_{4P} \\
 & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{(\overline{u_k + u'_k}) \overline{\delta q^2}}{2} \right)}_{4T_u} + \nu \left[ \underbrace{2 \frac{\partial^2}{\partial r_k^2}}_{4D_\nu} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_k^2}}_{4D_{X,\nu}} \right] \overline{\delta q^2} \\
 & - 2\nu \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial \overline{u_i^2}}{\partial x_k} \right) + \left( \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x'_k} \right) \right]}_{4\epsilon}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \overline{\delta c^2}}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\overline{U}_k + \overline{U}'_k}{2} \right) \frac{\partial \overline{\delta c^2}}{\partial X_k}}_{4A^c} + \underbrace{\frac{\partial \overline{\delta u_k \delta c^2}}{\partial r_k}}_{4\Pi^c} + \underbrace{\frac{\partial U_k \overline{\delta c^2}}{\partial r_k}}_{4\Pi_U^c} \\
 & = \underbrace{-2 \overline{\delta c \delta u_k} \frac{\partial \overline{\delta C}}{\partial r_k}}_{4P^c} - \underbrace{(\overline{u_k + u'_k}) \overline{\delta c} \frac{\partial \overline{\delta C}}{\partial X_k}}_{4P^c} \\
 & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{(\overline{u_k + u'_k}) \overline{\delta c^2}}{2} \right)}_{4T^c} + \kappa \left[ \underbrace{2 \frac{\partial^2}{\partial r_k^2}}_{4D_\nu^c} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_k^2}}_{4D_{X,\kappa}^c} \right] \overline{\delta c^2} \\
 & - 2\kappa \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial \overline{c^2}}{\partial x_k} \right) + \left( \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x'_k} \right) \right]}_{4\kappa^c}
 \end{aligned} \tag{2}$$

異なる渦スケール間での輸送を評価できることから、Scale-by-scale (SBS) 方程式と呼ばれる (式 1)。ここで  $\overline{\delta q^2} = \overline{(\delta u_i^2)}$  であり、 $\delta u_i = u_i - u'_i$  であることから、空間二点 ( $\mathbf{x}' = \mathbf{X} + \mathbf{r}/2$ ,  $\mathbf{x}'' = \mathbf{X} - \mathbf{r}/2$ ) における速度変動差を意味する。また式中の各項は  $A_t$  が時間発展項、 $A$  が移流項、 $\Pi$  が非線形輸送項、 $\Pi_U$  が線形輸送項、 $P$  が乱流生成項、 $T$  が乱流輸送項、 $T_p$  が圧力輸送項、 $D$  が粘性輸送項を示す。式(2)にはスカラー場に対する同様の式 (Scale-by-scale for Scalar (SBSS) 方程式) を示す。上付き  $c$  がスカラー濃度を表す。

図 3(a), (b) に、中心軸上の  $xL = 2.0, 5.0$  における SBS 方程式の各項の二点間距離  $r$  に対する分布をそれぞれ示す。ここで、縦軸に示すそれぞれの項は散逸項  $\epsilon$  で、横軸に示す二点間距離  $r$  は  $\lambda$  で無次元化されている。また、各項の値は周方向に平均されており、上付き添え字の  $a$  で表されている。図 3 より、非線形輸送項  $\Pi$  は、どちらの位置においても  $r/\lambda = 1.0$  程度でピークを取ることがわかる。すなわち乱流エネルギーのスケール間輸送は  $\lambda$  程度のスケールで活発に行われることがわかる。また、完全発達領域である  $xL = 5.0$  ではすべてのスケールで正の値、つ

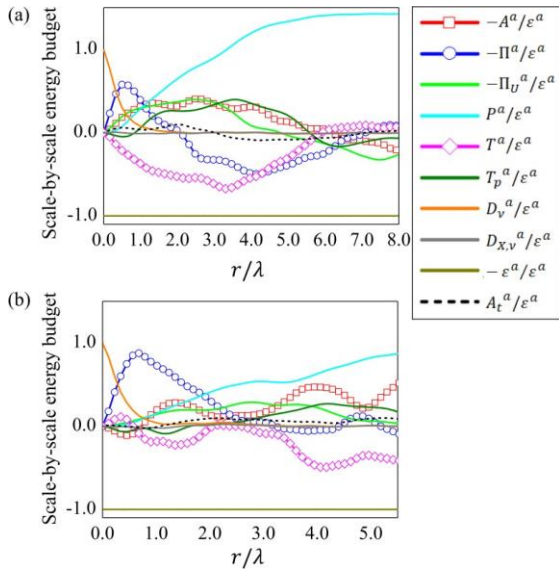


Fig. 3 Circumferentially averages of the terms in KHMH equation at (a)  $x/L=2.0$  and (b)  $x/L=5.0$ .

まり順カスケード方向の輸送傾向を示しているが、発達遷移領域である  $x/L=2.0$  では  $r/\lambda > 2.0$  のスケールで逆カスケード方向の輸送傾向を示している。また、移流項  $A$  と乱流輸送項  $T$  は主流方向位置によらず、正負に対をなす分布となる。このような結果は、エネルギーを保有する大きな渦によって小さなスケールの渦が輸送される **sweeping** 効果によるものとして、フラクタル格子乱流や正方形柱近傍後流でも報告されている。

図 4(a), (b) に、中心軸上の  $x/L=2.0, 5.0$  における SBSS 方程式の各項の二点間距離  $r$  に対する分布を示す。ここで、縦軸の各項は散逸項  $\chi$  で、二点間距離  $r$  は  $\lambda$  で無次元化されている。また、各項の値は周方向に平均されている。図 4 より、非線形輸送項  $\Pi_c$  は  $r/\lambda = 1.0$  程度でピークを取ることから、スカラのスケール間輸送も速度場と同様に  $\lambda$  程度のスケールで活発に行われることがわかる。また、 $\Pi_c$  は主流方向位置によらずほぼすべてのスケールで正の値を持つことから、スカラは常に順カスケード方向の輸送がなされているといえる。さらに、移流項  $A_c$  と乱流輸送項  $T_c$  は主流方向位置によらず正負に対をなす分布となる。これは速度場と同様に、大きな渦によって小さなスケールの渦が輸送される **sweeping** 効果によるものであると考えられる。逆カスケード方向の輸送現象について調査するために、速度三次構造関数  $\delta u_{\parallel} \delta q^2$  およびスカラ三次構造関数  $\delta u_{\parallel} \delta c^2$  を解析した。ここで、 $\delta u_{\parallel}$  は半径方向変動速度差であり、三次構造関数は異なるスケールを有する渦間の半径方向フラックスを表す。大スケールから小スケールへの輸送は、二点間の距離を縮める運動として解釈できるので、この場合  $\delta u_{\parallel}$  は負となる。つまり、三次構造関数が負の値を持つとき順カスケード方向の輸送が存在することを意味する。以降では、正の値で順カスケード方向の輸送を示すように、三次構造関数には

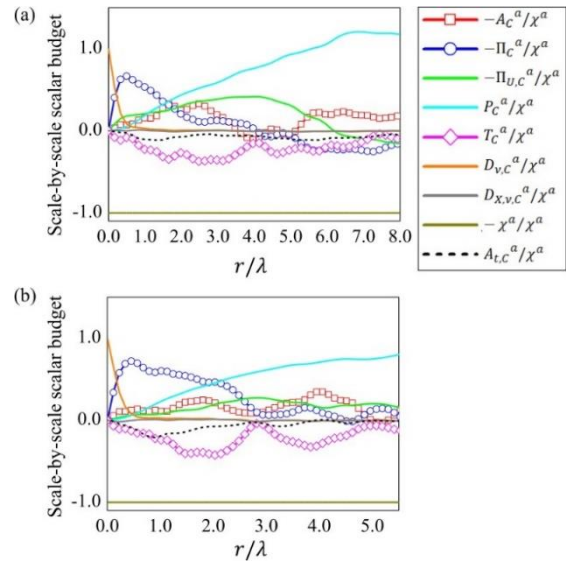


Fig. 4 Circumferentially averaged of the terms in SBSS equation at (a)  $x/L=2.0$  and (b)  $x/L=5.0$ .

マイナスを付ける。

図 5 (a), (b) に、中心軸上の  $x/L=2.0, 5.0$  における速度三次構造関数  $\delta u_{\parallel} \delta q^2$  およびスカラ三次構造関数  $\delta u_{\parallel} \delta c^2$  の二点間距離  $r$  に対する分布をそれぞれ示す。図 5(a) より、速度三次構造関数は、 $x/L=5.0$  ではすべてのスケールで正の値、 $x/L=2.0$  では  $r/\lambda > 2.0$  のスケールで負の値を持つことがわかる。このことから、乱流エネルギーは発達遷移領域において  $r/\lambda > 2.0$  のスケールで逆カスケード方向に輸送されることが明らかになった。このようなエネルギーの流れは、Richardson-Kolmogorov のカスケード理論とは異なる。そのため、発達遷移領域における流れ場の非平衡性は、乱流エネルギーの逆カスケード方向のスケール間輸送によるものであると考えられる。また、図 5(b) より、スカラ三次構造関数はすべてのスケールで主流方向位置によらず正の値を取る。そのため、スカラ場では常に順カスケード方向の輸送が行われることが明らかになった。

非線形輸送項  $\Pi$  と圧力場の相関をさらに調べるために、図 6 に、未発達領域に相当する  $x/L=0.5$ 、発達遷移領域である  $x/L=2.0$ 、および完全発達領域である  $x/L=5.0$  の中心軸上における変動圧力と変動速度のパワースペクトルとその近傍における瞬間圧力場および流線の  $x$ - $y$  断面マップを示す。なお、スペクトルの縦軸は波数  $k$  と変動圧力強度  $p^2$  で、横軸はコルモゴロフスケール  $\eta$  で無次元化されている。図 6(a) より、未発達領域から発達遷移領域に相当する上流部では、圧力変動及び速度変動の両方が比較的明確なピークをもつことがわかる。つまり、この領域では大規模渦構造が維持されており、実際カラーコンターマップからもその様子は確認できる。一方発達遷移領域(図 6(b))では、圧力のパワースペクトルは明確なピークが存在するものの、速度変動にはピークがない、すなわち渦スケールが大スケールから小スケールにまたがること



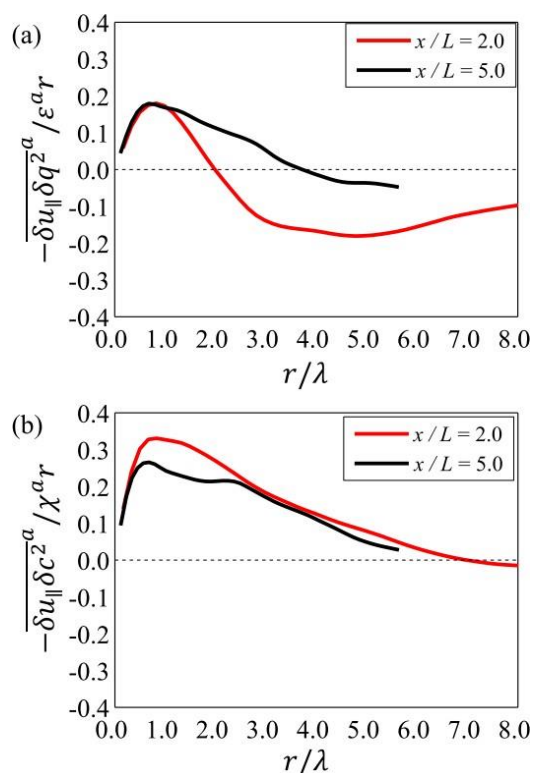


Fig. 5 The normalized third-order structure function verse radial direction for (a) energy (b) scalar.

(c) では、圧力変動も明確なピークが消えており、実際カラーコンターマップでも上流部で見られたような高圧部または低圧部からなる大きな流体塊は見られない。このことは、逆カスケード現象には大規模構造の存在が影響している可能性を示唆する。すなわち、乱流エネルギーの逆カスケード現象は、流れが乱流化し小スケールの乱れが空間全体で存在するものの、圧力場は大規模構造がまだまだ支配的な領域で見られるといえる。

## 5. まとめ

本研究では、乱流混合層の乱流エネルギーの輸送機構を解明することを目的として、直接数値計算を実行した。得られた結果に対して構造関数を用いた解析および流れ場の可視化を行い、特に発達遷移領域における現象解明を行った。その結果、乱流エネルギーのスケール間輸送は、マイクロスケール程度の大きさで活発に行われること、また乱流エネルギーは発達遷移領域において、マイクロスケールの2倍以上の渦スケールで逆カスケード方向に輸送されることが明らかになった。この逆カスケード方向の輸送現象が非平衡性を示す要因であると考えられる。また、乱流エネルギーの逆カスケード現象は、流れが乱流化し、小スケールの乱れが空間全体で存在するものの、圧力場は大規模構造がまだまだ支配的な領域で見られることが明らかになった。

## 謝辞

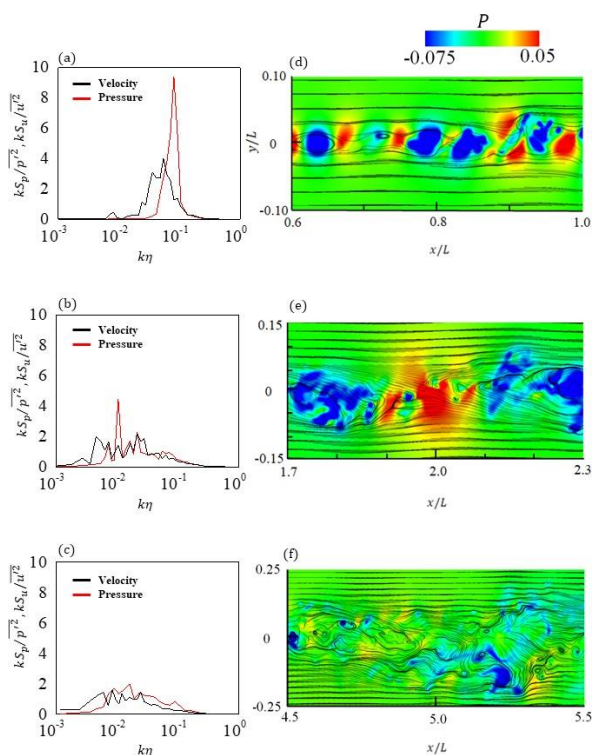


Fig. 6 The normalized power spectrum for velocity and pressure at (a)  $x/L = 0.5$ , (b)  $x/L = 2.0$ , and (c)  $x/L = 5.0$ . The right color contour maps are the instantaneous snapshots of the pressure field at (d)  $x/L = 0.5$ , (e)  $x/L = 2.0$ , and (f)  $x/L = 5.0$ .

本研究は海洋研究開発機構・地球シミュレータセンターのスーパーコンピュータ (NEC SX-ACE) を用いて行われた。また科研費・基盤研究 (No. 18H01369, No. 20K04264) のサポートを受けた。

## 文献

- [1] K. Takamura, Y. Ito, Y. Sakai, K. Iwano, and T. Hayase, "Momentum transport process in the quasi self-similar region of free shear mixing layer," *Phys. Fluids* **30**, 015109 (2018).
- [2] Y. Ito, K. Nagata, Y. Sakai, and O. Terashima, "Momentum and mass transfer in developing liquid shear mixing layers," *Exp. Therm. and Fluid Sci.* **51**, 28 (2013).
- [3] K. Takamura, Y. Sakai, Y. Ito, K. Iwano, and T. Hayase, "Dissipation scaling in the transition region of turbulent mixing layer," *Int. J. Heat Fluid Flow* **75**, 77 (2019).

# Numerical Study on Inter-scale Transfer of Energy and Scalar in Turbulent Mixing Layer

Project Representative

Yasuhiko Sakai Dept. of Mechanical Systems Engineering, Nagoya University

Authors

Yasuhiko Sakai\*<sup>1</sup>, Yasumasa Ito\*<sup>1</sup>, Koji Iwano\*<sup>1</sup>, Takumi Okawa\*<sup>1</sup>, Keigo Matsuda \*<sup>2</sup>

\*<sup>1</sup> Department of Mechanical Systems Engineering, Nagoya University

\*<sup>2</sup> Center for Earth Information and Technology, Research Institute for Value-Added-Information Generation, Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology

Direct numerical simulation (DNS) was carried out for a spatially developing turbulent mixing layer to investigate turbulent energy and scalar transport mechanisms in both the developing and developed regions. Scale-by-scale energy budget analysis based on Karman-Howarth-Monin-Hill (KMH) equation was employed to reveal inter-scale transport of energy and scalar. The results indicate that the inverse cascade phenomenon of energy, which is firstly documented in the fully developed region, is closely related to evolutions of large structures of pressure.

**Keywords :** Turbulence, Mixing layer, Dissipation, Equilibrium, KMH equation (5ワード程度)

## 1. Introduction

Turbulent mixing layer is one of canonical flows and its flow characteristics changes along the downstream direction. In the past study, the state is divided into three regions: developing region, quasi-developed region, and fully-developed region. In particular, the quasi-developed region has shown some unique features such that the turbulent dissipation coefficient is not constant even though the major turbulent statistics satisfy typical distributions, and therefore, it is of great interest to clarify the physical mechanism appearing in this region. In this context, the scale-by-scale analysis based on the structure functions are a common method to reveal the inter-scale transfer of energy and scalar. Thus, in this study, we performed a direct numerical simulation (DNS) in a mixing layer and applied scale-by-scale analysis for turbulent energy and scalar transport.

## 2. Direct numerical simulation

Figure 1 shows the schematic view of the computational domain. It is a rectangular box with  $L_x \times L_y \times L_z = 7L \times L \times 0.8L$ , where  $L$  is the length in the  $y$  direction, with the corresponding mesh numbers of  $N_x \times N_y \times N_z = 5600 \times 800 \times 600$ . The inlet Reynolds number  $Re (= UL/\nu)$ , where  $U$  is the average inlet velocity,  $M$  is the vertical length of the computational domain, and  $\nu$  is the kinematic viscosity, is set to 12000. The Schmidt number  $Sc$  for the passive scalar was set to 1. The governing equations are dimensionless NS equations and scalar transport equation. The velocity and scalar fields are solved using a finite difference method with the fractional step method. The Poisson equation is solved by the conjugate gradient (CG) method.

## 3. Results and discussion

Figures 2(a), (b) shows the instantaneous snapshots of (a) absolute value of the vorticity on the  $x$ - $y$  plane, (b)

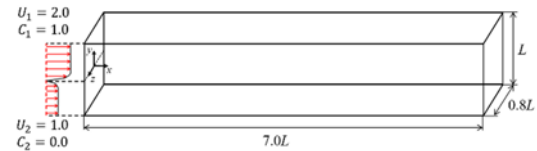


Fig. 1 Computational domain

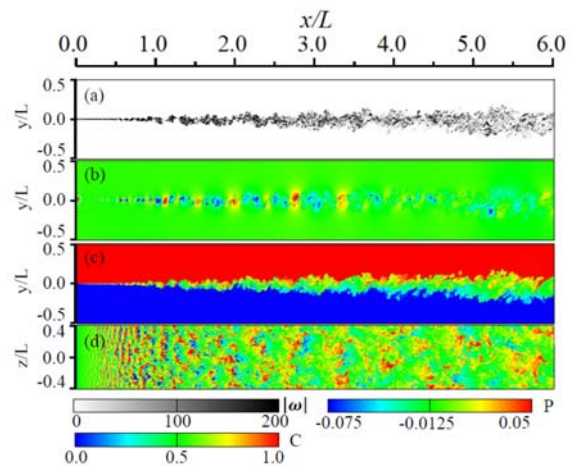


Fig. 2 Instantaneous snapshots of (a) absolute value of the vorticity on the  $x$ - $y$  plane, (b) pressure on the  $x$ - $y$  plane, (c) scalar on the  $x$ - $y$  plane, and (d) scalar on the  $x$ - $z$  plane.

pressure on the  $x$ - $y$  plane, (c) scalar on the  $x$ - $y$  plane, and (d) scalar on the  $x$ - $z$  plane. Figures 2 (a) and (c) illustrates confirms that the mixing layer develops toward the downstream direction and the flow becomes turbulent. From Figs. 2 (b) confirms that large-scale positive and negative pressure appears in  $x/L < 4.0$  but such large-scale structure disappears in the downstream region of  $x/L > 4.0$ . Also it is found from statistical analysis on turbulence intensity and turbulent dissipation coefficient that, in the present mixing layer,  $x/L < 1.5$  corresponds to the developing region,  $1.5 < x/L < 3$

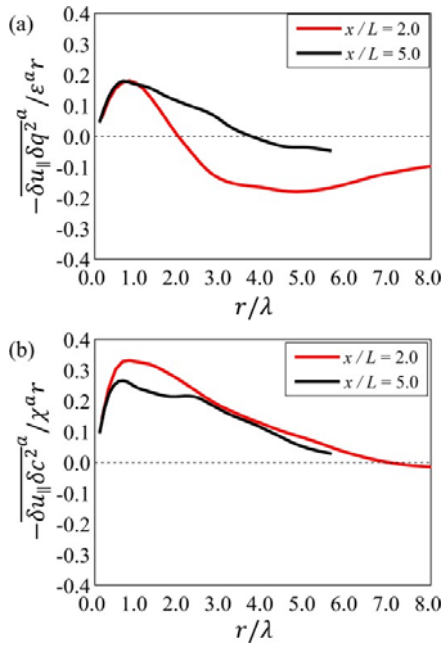


Fig. 3 The normalized third-order structure function verse radial direction for (a) energy (b) scalar.

corresponds to the quasi-developed region, and  $x/L > 3$  corresponds to the fully-developed region. Thus, in the following section, analysis are conducted with focusing on the regions around  $x/L = 2.0$  and  $x/L = 5.0$ .

#### 4. Inter-scale transfer for turbulent energy and scalar

The distribution of the third-order structure function is shown in Fig. 3. Here, although details of the scale-by-scale analysis is not shown here to save the space, the positive value means normal cascade and the negative value means inverse cascade. The  $x$ -axis corresponds to the distance of interest. Figure 3 indicates that both energy and scalar represent a normal cascade behavior in the fully developed region ( $x/L = 5.0$ ). However, the trend is different at the upstream region ( $x/L = 2.0$ ). The scalar shows a normal cascade behavior in all the distance but the energy shows the inverse cascade in  $r/\lambda > 2$ . A possible explanation causing this difference is the effect of pressure. In fact the governing equations indicate that the scalar transport equation is similar to momentum equations in NS equations except for the lack of pressure gradient term. Thus, we plot the power spectrum of velocity and pressure in Fig. 4 (a)-(c) together with the instantaneous pressure map in Fig. 4(d)-(f). As we can see in Fig. 4(a), the red line and black line indicates the normalized power spectrum of velocities and pressure respectively. Clear peaks are observed for both velocity and pressure in the upstream region, which proves the existence of large-scale structure. With the development of the flow, the clear peak of velocities in the power spectrum breaks up while the pressure one still exists as shown in Fig. 4(b). Eventually, both the peaks of pressure and velocities disappear in the further downstream region where the flow is fully developed. This

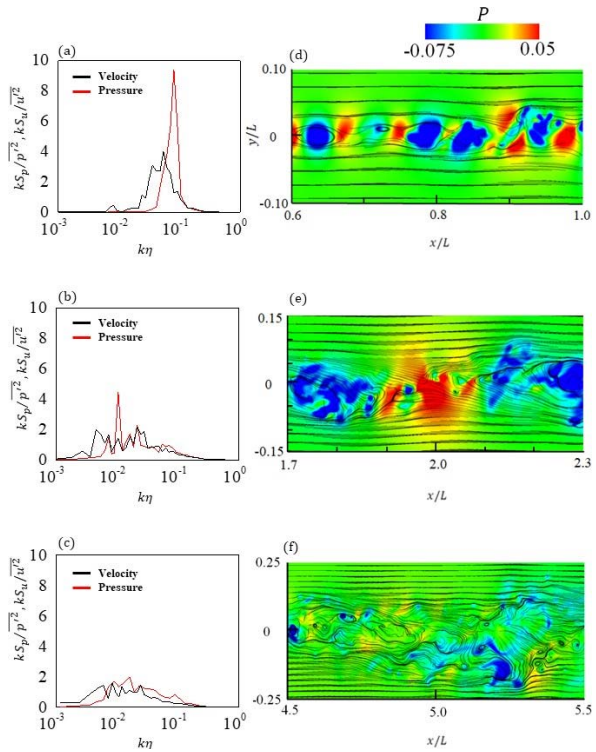


Fig. 4 The normalized power spectrum for velocity and pressure at (a)  $x/L = 0.5$ , (b)  $x/L = 2.0$ , and (c)  $x/L = 5.0$ . The right color contour maps are the instantaneous snapshots of the pressure field at (d)  $x/L = 0.5$ , (e)  $x/L = 2.0$ , and (f)  $x/L = 5.0$ .

phenomenon can be represented more intuitively by the contour map of pressure. The large structures of pressure corresponds to positive and negative pressures area that appearing in the contour map. With the development of the flow, the large structures of pressure emerge in Fig. 4(e) still exist, whereas no clear peak appears in the power spectrum for velocity fluctuation. In the further downstream region where the flow is fully developed, large structure for pressure, i.e., the imbalance, disappears, and only the structures are observed. This fact indicates that the imbalance between the evolution of velocities and pressure induces the inverse cascade phenomenon for energy when  $\lambda > 2$  at developing region of  $x/L = 2.0$ .

#### 5. Summary

An inverse cascade phenomenon for turbulent energy is observed in the quasi-developed region, while such behavior is not observed for scalar. The results of power spectrum and visualization indicate that the imbalance between the evolution of large structures of velocity and pressure induce this phenomenon.

#### Acknowledgement

The numerical simulations were conducted at the Earth Simulator Center (JAMSTEC). Part of this re- search was supported by KAKENHI No.20K04264.