

海洋地球科学における同期現象の数理

課題責任者

河村 洋史 海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門 数理科学・先端技術研究
開発センター

著者

大島 逸平*¹*², 河村 洋史*²

*¹ 東北大学 流体科学研究所 未到エネルギー研究センター, *² 海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門数理科学・先端技術研究開発センター

本課題では、「数値解析リポジトリ」のアプリケーション「同期現象モデル」を研究開発している。具体的には、海洋地球情報に潜む同期現象を発見・解明するために、位相モデルを基にした同期現象の解析システムを構築中である。加えて、位相縮約法と呼ばれる数理科学的手法を拡張・応用することにより、海洋・地球・生命に関する様々な同期現象を解析している。本稿では、令和3年度の研究成果として、周期外力を加えた回転水槽における進行振動対流の強制同期の直接数値計算について報告する。加えて、カルマン渦列の同期現象の位相縮約解析についても簡単に紹介する。

キーワード：非線形動力学，同期現象，位相縮約，回転水槽，カルマン渦列

1. はじめに

自然界にはさまざまな振動現象および同期現象が存在する。典型的には、各振動性素子は常微分方程式のリミット・サイクル解として記述される。そのような各リミット・サイクル振動子のダイナミクスを位相と呼ばれるスカラー変数のみで近似する位相縮約法が、結合振動子系の同期現象に対する強力な解析手法として知られている [1, 2]。

しかし、自然界には偏微分方程式のリミット・サイクル解やさらにはリミット・トーラス解で記述される振動現象とそれらの同期現象も存在する。特に、大気大循環の模型実験系である回転水槽実験系 [3]において、振動対流の同期現象が観察されている [4, 5, 6]。そこで、課題責任者はこれまでに、偏微分方程式のリミット・サイクル解やリミット・トーラス解に対する位相縮約法を定式化してきた [7-12]。

解析手法の整備が完了したので、本研究においては、研究開始当初からの主要課題である、回転水槽の直接数値計算および位相縮約解析を開始した。

2. 数値計算手法と計算条件

回転水槽内で生じる熱対流現象を数値解析するため、ブシネスク近似のもと非圧縮性条件を満たす質量、運動量保存式およびエネルギー方程式を連成させて解く。ここでは、オープンソースの数値流体解析ツールボックスの1つである OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation) v2012 を用いた。ブシネスク近似のもと、重力項のうち浮力の効果を運動量式に加えた非圧縮性非定常熱流動ソルバーである `buoyantBoussinesqPimpleFoam` を改良して、回転水槽内における熱対流現象の3次元数値解析を行った。ここでは、回転に起因する力を加えるため、

運動方程式にコリオリ力と遠心力を体積力として追加している。

計算に用いたメッシュを図1に示す。回転水槽の計算領域は、内半径25 mm、外半径80 mm、深さ140 mmであり、先行研究 [3]の実験水槽に合わせた寸法形状としている。動径(r)方向、方位角(θ)方向、鉛直(z)方向にそれぞれ105, 180, 71点の格子点を配置し、計130万点の格子点を用いた。また、壁面近傍での流動を解像することが重要であるため、内壁と外壁近傍では格子サイズを細かくしている。

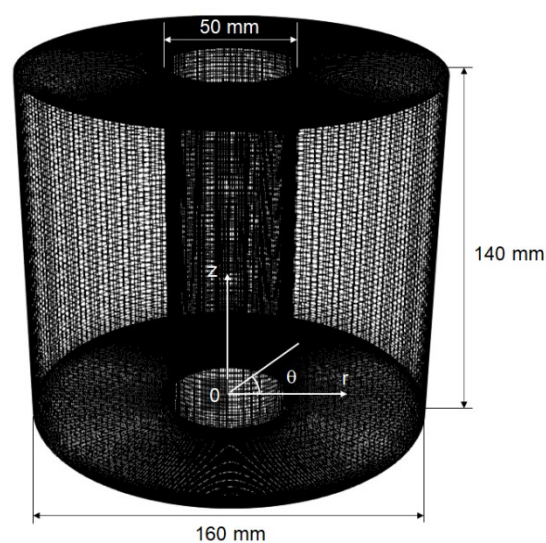


図1 計算格子
(内半径 25 mm, 外半径 80 mm, 深さ 140 mm).

各方程式の離散化では、時間差分は2次精度後退差分、

移流項では2次精度風上差分を用いた。速度、温度、圧力をそれぞれ反復法によって求め、すべての残差が 1×10^{-8} となった時点を収束とみなした。

速度の境界条件は滑りなし条件とした。温度の境界条件では、上面と下面は断熱壁とし、内壁と外壁はそれぞれ等温壁条件としてそれぞれ288.15 K, 298.15 Kを与えた。また、どの壁面でも圧力勾配が0となるように圧力の境界条件を与えた。

数値解析で用いた数値実験条件と物性値を表1に示す。回転数は1.6 rad/sとし、内外壁間の温度差を10 Kとしている。物性値はグリセリン水溶液を模擬しており、水よりも高いプラントル数としている。

なお、数値計算にはES4CPUを使用した。

表1 計算条件.

Rotation rate [rad/s]	1.6263
Temperature at inner wall [K]	288.15
Temperature at outer wall [K]	298.15
Temperature difference [K]	10
Kinematic viscosity [m ² /s]	3.18×10^{-6}
Gravitational acceleration [m/s ²]	9.81
Thermal expansion coefficient [1/K]	3.69×10^{-4}

3. 数値計算結果

図2に、 $z=70$ mmでの $r-\theta$ 断面における温度分布と $\theta=0$ における $r-z$ 断面をそれぞれ示す。カラーマップは低温壁と高温壁の温度範囲における温度を示している。図2(a)の温度分布をみると、流れが蛇行することによる温度分布ができており、傾圧不安定波が確認できる。鉛直方向の温度分布を示す図2(b)をみると、等温線が傾いていることが確認できる。

本解析条件では、方位角において波数3が卓越する3AV (Amplitude Vacillation) 流れとなっている。温度変動の時間発展を示すため、図3に $z=70$ mm, $r=52.5$ mmにおける温度変動を示す。文献[6]と同様に、一定間隔で明暗する振動が確認できる。また、波数3の波が一定速度で伝わっている。

方位角に関して温度をフーリエ解析して得られる波数3のフーリエ振幅の絶対値の時系列を図4に示す。水槽が回転をはじめ、時刻1000 sほどまでは過渡的な挙動を示し、時刻1000 s以降では振動をはじめめる。この振動の周期は時間経過に伴い一定値に近づき、本条件では振動周期 τ_R は162.8 sに収束する。以上により、回転水槽における進行振動対流を再現できるようになった。

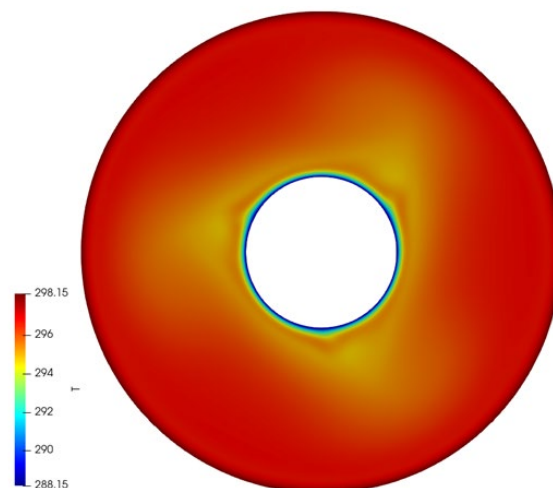
次に、等温壁条件としていた外壁の温度に周期外力として次の境界条件を施す[4,6]：

$$T_{ex} = T + \epsilon \sin(2\pi ft).$$

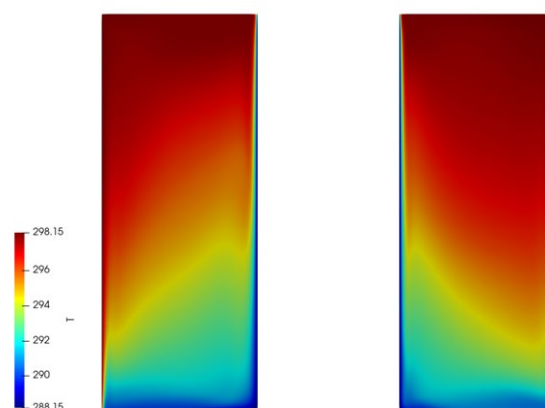
ここで、 T_{ex} は外壁の温度、 ϵ は振幅(=0.05 K)、 T は基準温度(=298.15 K)、 f は振動周波数、 t は時刻を表す。

振幅 ϵ が0であるときに相当する、先の振動周期 τ_R を

基準として f を変化させたとき、周期外力の振動周期 $\tau_f(=1/f)$ と波数3成分の振動周期がどの範囲であれば同期するかを調べた。



(a) z軸中央断面 ($z=70$ mm)の温度分布.



(b) r-z断面の温度分布.

図2 各断面における温度分布.

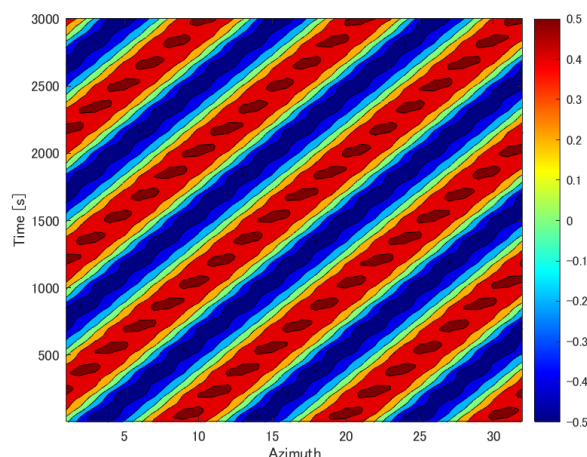


図3 波数3の成分が卓越していることを示す Hovmöller diagram ($z=70$ mm, $r=52.5$ mm).

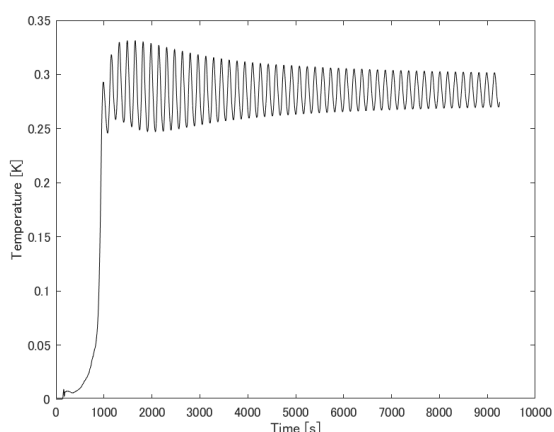


図4 波数3成分の温度変動の時系列.

図5に $\tau_F = \tau_R + 2$, $\tau_F = \tau_R + 8$ における波数3の振動周期の時間発展をそれぞれ示す. 図5(a)によると, τ_R より2s長い周期外力を施したとき, 波数3の振動数と周期外力の振動数が異なる条件から計算を開始したため, 最初は本来の τ_R より小さな振動周期となっている. しかし, 時間をかけて振動周期が上昇し, 最終的に τ_F と一致することが確認できる. 一方, τ_F と τ_R の差が大きい条件である図5(b)では, 波数3の振動周期は周期外力の振動周期と一致することなく, 振動することがわかる. なお, このときの振動周期を平均するとおおよそ τ_R と一致し, 周期外力と波数3の振動周期が同期していないことが確認できる.

4. おわりに

文献 [4,6]で実験により観察されていた, 周期外力を受けた回転水槽における進行振動対流の強制同期を, 直接数値計算により再現することができた. 本稿では結果を示していないが, 高温壁にインパルス摂動を印加することで, 振動対流の位相応答も計算した. 現在, 位相応答から求めた位相感受関数を用いて, 強制同期に関する直接数値計算の結果と位相縮約解析の結果を比較中である. さらに, 位相感受関数を用いて, 強制同期に最適な周期外力を解析する計画である.

最後に, 本課題においては, カルマン渦列の同期現象に対する解析手法も開発した. 具体的には, 拘束条件を持つ偏微分方程式のリミット・サイクル解に対する位相縮約法 [10]と埋め込み境界射影法 [13,14]を融合して, カルマン渦列に対する位相縮約法を定式化した. 本手法は地球流体・生物流体・流体力学と幅広い応用可能性を持つ. なお, 本研究はカリフォルニア大学ロサンゼルス校との共同研究である. 図6にカルマン渦列の流れ場と位相感受関数のスナップショットを示す. 詳細は文献 [15]を参照してほしい.

謝辞

本研究はJSPS 科研費 JP20K03797 の助成を受けたものである.

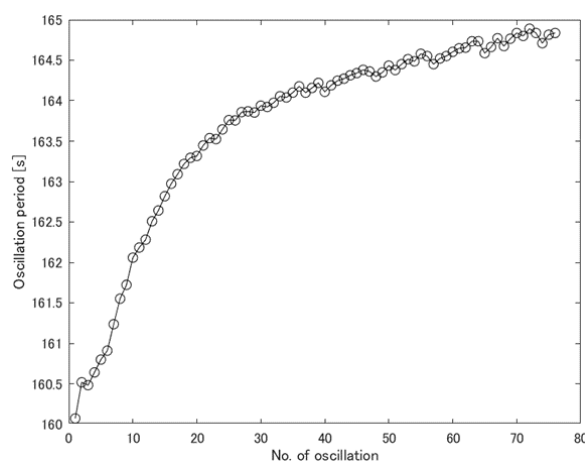
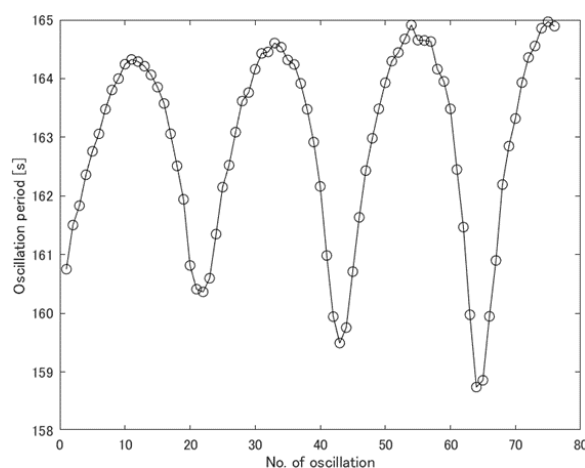
(a) $\tau_F = \tau_R + 2$ (=164.8s).(b) $\tau_F = \tau_R + 8$ (=170.8s).

図5 周期外力を外壁に施した条件における波数3成分の振動周期.

文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, New York, 1984; Dover, New York, 2003).
- [2] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [3] P. L. Read, M. J. Bel, D. W. Johnson, and R. M. Small, Quasi-periodic and chaotic flow regimes in a thermally driven, rotating fluid annulus, *J. Fluid Mech.* **238**, 599-632 (1992).
- [4] F. J. R. Eccles, P. L. Read, A. A. Castrejon-Pita, and T. W. N. Haine, Synchronization of modulated traveling baroclinic waves in a periodically forced, rotating fluid annulus, *Phys. Rev. E* **79**, 015202(R) (2009).
- [5] A. A. Castrejon-Pita and P. L. Read, Synchronization in a pair of thermally coupled rotating baroclinic annuli: Understanding atmospheric teleconnections in the laboratory, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 204501 (2010).

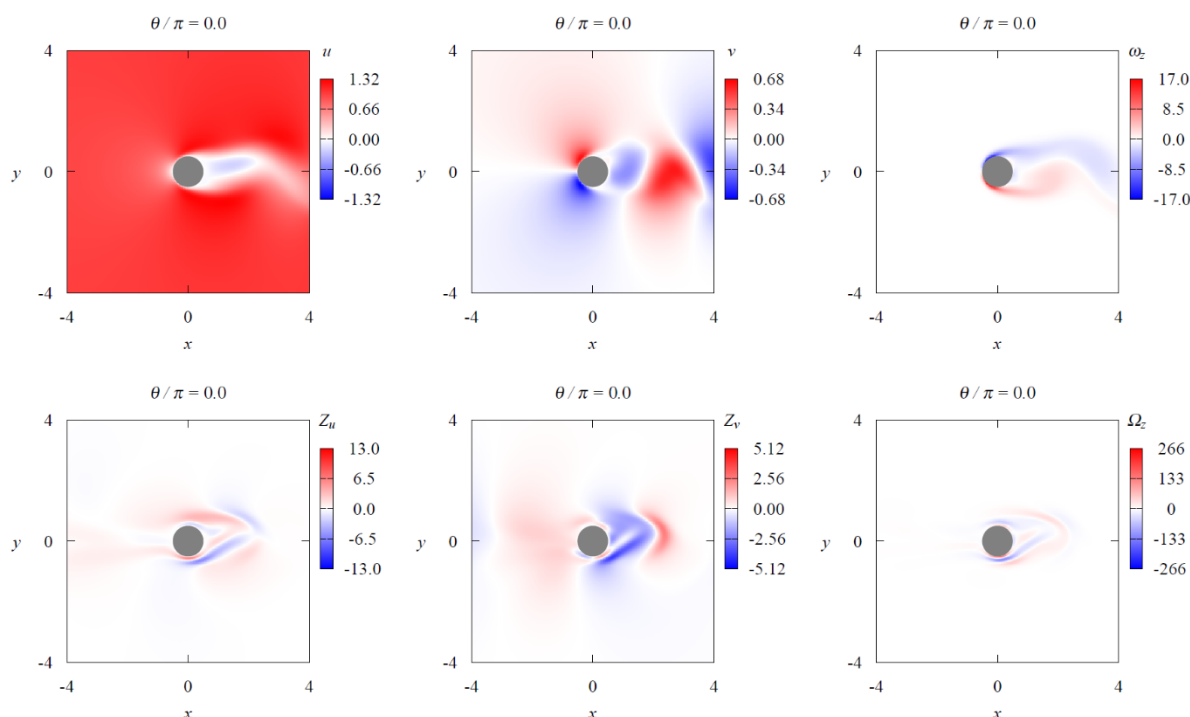


図6 カルマン渦列の流れ場 (u, v)と位相感受関数 (Z_u, Z_v)のスナップショット. 位相感受関数は各点に加えられた弱い摂動に対する流れの位相応答を定量化する. 具体的には, 赤い (青い) 領域に正の摂動が加わると流れの位相が進む (遅れる). ここで, 流れ場の渦度 (ω)と位相感受関数の渦度 (Ω) は次で定義される: $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, $\Omega = \nabla \times \mathbf{Z}$. なお, 位相感受関数の渦度 (Ω) は渦度の位相感受関数 (ζ) と次の関係にある: $\Omega = \nabla \times \nabla \times \zeta$. 詳細は文献 [15] を参照.

[6] P. L. Read, X. Morice-Atkinson, E. J. Allen, and A. A. Castrejon-Pita, Phase synchronization of baroclinic waves in a differentially heated rotating annulus experiment subject to periodic forcing with a variable duty cycle, *Chaos* **27**, 127001 (2017).

[7] Y. Kawamura and H. Nakao, Collective phase description of oscillatory convection, *Chaos* **23**, 043129 (2013).

[8] Y. Kawamura and H. Nakao, Noise-induced synchronization of oscillatory convection and its optimization, *Phys. Rev. E* **89**, 012912 (2014).

[9] Y. Kawamura and H. Nakao, Phase description of oscillatory convection with a spatially translational mode, *Physica D* **295-296**, 11-29 (2015).

[10] Y. Kawamura, Phase reduction of limit-torus solutions to partial differential algebraic equations, *Phys. Rev. Research* **1**, 033130 (2019).

[11] Y. Kawamura and R. Tsubaki, Phase reduction approach to elastohydrodynamic synchronization of beating flagella, *Phys. Rev. E* **97**, 022212 (2018).

[12] Y. Kawamura, Factors determining the relaxation time for elastohydrodynamic synchronization of adjacent beating flagella, *Results Phys.* **25**, 104261 (2021).

[13] K. Taira and T. Colonius, The immersed boundary method: A projection approach, *J. Comput. Phys.* **225**, 2118-2137 (2007).

[14] T. Kajishima and K. Taira, *Computational Fluid Dynamics: Incompressible Turbulent Flows* (Springer, New York, 2017).

[15] Y. Kawamura, V. Godavarthi, and K. Taira, Adjoint-based phase reduction analysis of incompressible periodic flows, arXiv:2204.13201 (2022) under review.

Mathematical Theory of Synchronization Phenomena in Marine-Earth Science

Project Representative

Yoji Kawamura Center for Mathematical Science and Advanced Technology, Research Institute for Value-Added-Information Generation, Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology

Authors

Ipppei Oshima ^{*1 *2}, Yoji Kawamura ^{*2}

^{*1} Innovative Energy Research Center, Institute of Fluid Science, Tohoku University, ^{*2} Center for Mathematical Science and Advanced Technology, Research Institute for Value-Added-Information Generation, Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology

In this project, we have been developing the mathematical theory of synchronization phenomena in marine-earth science for an application of the Numerical Analysis Repository. Specifically, to discover and elucidate synchronization phenomena latent in marine-earth data, we are developing an analysis system based on a phase model for synchronization phenomena. Furthermore, by generalizing and applying a mathematical method called the phase reduction method, we have been analyzing various synchronization phenomena associated with the ocean, earth, and life. In this report, we present the direct numerical simulation results for the forced synchronization of traveling and oscillating convection in a rotating fluid annulus subject to a periodic external forcing. Further, we also make a brief report on the phase reduction analysis of a Karman vortex street.

Keywords: Nonlinear dynamics, Synchronization, Phase reduction, Rotating annulus, Karman vortex street

1. Introduction

Nature provides a rich variety of rhythmic systems and synchronization phenomena. A rhythmic system is typically described by a limit-cycle solution to an ordinary differential equation. A phase reduction method, which enables us to describe the dynamics of an oscillator using a single degree of freedom called the phase, has been successfully applied to analyze the synchronization properties of weakly coupled oscillators [1, 2].

However, there also exist rhythmic spatiotemporal patterns described by limit-cycle solutions or limit-torus solutions to partial differential equations, and such rhythmic spatiotemporal patterns can also exhibit synchronization phenomena. For example, the synchronization of oscillatory thermal convection has been experimentally observed in a rotating fluid annulus, which is an analogue of atmospheric circulation [3-6]. Hence, the project representative has recently formulated the phase reduction methods for limit-cycle solutions and limit-torus solutions to partial differential equations [7-12].

Now that the analytical methods have been developed, we have started performing the direct numerical simulation and phase reduction analysis of a rotating fluid annulus, which has been the main subject since the beginning of our study.

2. Methods

Conservation of mass, momentum and energy equations for an incompressible one-phase flow are solved based on Boussinesq approximation to calculate a convective heat transfer in a rotating tank. We used buoyantBoussinesqPimpleFoam in OpenFOAM

(Open source Field Operation And Manipulation) v2012, an Open Source CFD toolbox, and implemented Coriolis and centrifugal force on the solver.

The computational domain has cylindrical coordinates whose inner radius is 25 mm, outer radius is 80 mm, and depth is 140 mm. The shape is consistent with the water tank used for the experiment [3].

We used second-order schemes for the discretization of time and spatial derivatives. All the boundaries are set to non-slip boundary conditions. The inner and outer boundaries are 288.15 and 298.15 K, respectively. The other boundaries are isothermal boundary conditions. The pressure gradient at all boundaries is zero. The computational condition is shown in Table 1.

Table 1 Computational condition.

Rotation rate [rad/s]	1.6263
Temperature at inner wall [K]	288.15
Temperature at outer wall [K]	298.15
Temperature difference [K]	10
Kinematic viscosity [m ² /s]	3.18×10^{-6}
Gravitational acceleration [m/s ²]	9.81
Thermal expansion coefficient [1/K]	3.69×10^{-4}

3. Results

The flow pattern is 3AV (Amplitude Vacillation) flow in the present condition, whose dominant wave number is 3 in the azimuthal direction. Fig. 1 shows the temperature variation at $z = 70$ mm and $r = 52.5$ mm. The periodic blinking of the temperature

is observed as in Ref. [6], and the wave pattern of wave number 3 travels at a constant velocity.

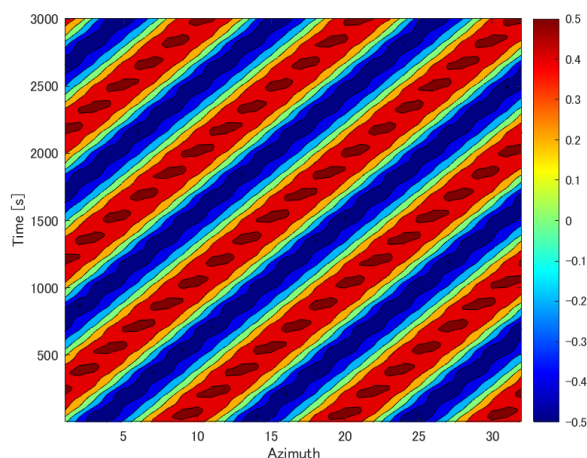


Fig. 1 Hovmöller diagram ($z = 70$ mm, $r = 52.5$ mm).

The time evolution of the absolute value of the Fourier amplitude of wave number 3 obtained by Fourier analysis of the temperature with respect to azimuth is shown in Fig. 2.

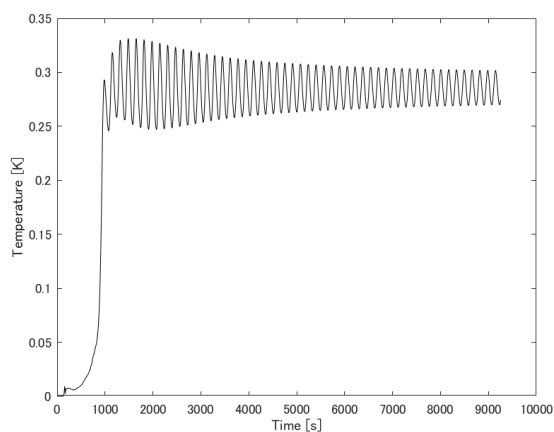


Fig. 2 Time evolution of temperature fluctuations of the wave number 3.

As soon as the water tank begins to rotate, transient behavior occurs until about 1000 s, and later the temperature oscillates. The period of the oscillation gets close to a constant value with time, and the oscillation period t_R converges to 162.8 s in the present study. From the above, we have succeeded to reproduce oscillatory thermal convection in a rotating fluid annulus.

To study synchronization phenomena in rotating tanks, periodic external forcing is applied to the temperature at the outer boundary using the following equation [4,6]:

$$T_{ex} = T + \epsilon \sin(2\pi f t),$$

where T_{ex} is the temperature at the outer boundary, ϵ is the amplitude of forcing ($=0.05$ K), T is the reference temperature, f

is the oscillation frequency ($= 1/t_F$), and t is the time.

We investigated the range of oscillation frequency for the synchronization between the frequency of external forcing and that of wave number 3. As an example, the time history of the oscillation period of the wave number 3 at $t_F = t_R + 2$ is shown in Fig. 3. When longer periodic forcing than t_R is applied to the outer boundary, the oscillation period is initially smaller than the original t_R . However, the oscillation period finally matches t_F by increasing the oscillation period with time.

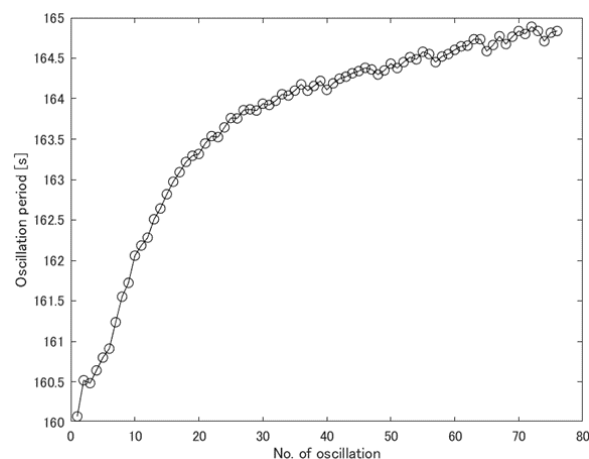


Fig. 3 Time evolution of the wave number 3 with periodic forcing ($t_F = t_R + 2 (=164.8\text{s})$).

4. Concluding remarks

The forced synchronization of traveling and oscillating thermal convection in a rotating fluid annulus subject to periodic external forcing, which has been experimentally observed in Refs. [4, 6], was reproduced by means of direct numerical simulation. Although the results are not shown in this report, the phase response of the oscillatory convection was also calculated by applying an impulsive perturbation to the outer boundary. We are now making a comparison of the forced synchronization between the direct numerical simulation and the phase reduction analysis using the phase sensitivity function obtained from the phase responses. Further, using the phase sensitivity function, we will also analyze the optimal waveform of the periodic external forcing for the forced synchronization.

Finally, in this project, we have also developed an analytical method for the synchronization phenomena of a Karman vortex street. Specifically, we have formulated a theory for the phase reduction of a Karman vortex street by a combination of the phase reduction method for limit-cycle solutions to partial differential equations with constraints [10] and the immersed boundary projection method for incompressible flows over bodies [13,14]. The theory has a wide range of applications in geophysical fluids, biofluid mechanics, and fluid engineering. Note that this study was conducted in collaboration with the University of California, Los Angeles. Please see Ref. [15] for the details.

Acknowledgement

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP20K03797.

References

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, New York, 1984; Dover, New York, 2003).
- [2] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [3] P. L. Read, M. J. Bel, D. W. Johnson, and R. M. Small, Quasi-periodic and chaotic flow regimes in a thermally driven, rotating fluid annulus, *J. Fluid Mech.* **238**, 599-632 (1992).
- [4] F. J. R. Eccles, P. L. Read, A. A. Castrejon-Pita, and T. W. N. Haine, Synchronization of modulated traveling baroclinic waves in a periodically forced, rotating fluid annulus, *Phys. Rev. E* **79**, 015202(R) (2009).
- [5] A. A. Castrejon-Pita and P. L. Read, Synchronization in a pair of thermally coupled rotating baroclinic annuli: Understanding atmospheric teleconnections in the laboratory, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 204501 (2010).
- [6] P. L. Read, X. Morice-Atkinson, E. J. Allen, and A. A. Castrejon-Pita, Phase synchronization of baroclinic waves in a differentially heated rotating annulus experiment subject to periodic forcing with a variable duty cycle, *Chaos* **27**, 127001 (2017).
- [7] Y. Kawamura and H. Nakao, Collective phase description of oscillatory convection, *Chaos* **23**, 043129 (2013).
- [8] Y. Kawamura and H. Nakao, Noise-induced synchronization of oscillatory convection and its optimization, *Phys. Rev. E* **89**, 012912 (2014).
- [9] Y. Kawamura and H. Nakao, Phase description of oscillatory convection with a spatially translational mode, *Physica D* **295-296**, 11-29 (2015).
- [10] Y. Kawamura, Phase reduction of limit-torus solutions to partial differential algebraic equations, *Phys. Rev. Research* **1**, 033130 (2019).
- [11] Y. Kawamura and R. Tsubaki, Phase reduction approach to elasto-hydrodynamic synchronization of beating flagella, *Phys. Rev. E* **97**, 022212 (2018).
- [12] Y. Kawamura, Factors determining the relaxation time for elasto-hydrodynamic synchronization of adjacent beating flagella, *Results Phys.* **25**, 104261 (2021).
- [13] K. Taira and T. Colonius, The immersed boundary method: A projection approach, *J. Comput. Phys.* **225**, 2118-2137 (2007).
- [14] T. Kajishima and K. Taira, *Computational Fluid Dynamics: Incompressible Turbulent Flows* (Springer, New York, 2017).
- [15] Y. Kawamura, V. Godavarthi, and K. Taira, Adjoint-based phase reduction analysis of incompressible periodic flows, arXiv:2204.13201 (2022) under review.