

幅広いプラントル数における対流と固体地球惑星科学への応用

課題責任者

宮腰 剛広 海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門 数理科学・先端技術研究
開発センター

著者

柳澤 孝寿*¹, 明石 恵実*², 櫻庭 中*³

*¹海洋研究開発機構 海域地震火山部門 火山・地球内部研究センター, *²Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, *³東京大学

地球内部の流動現象にはプラントル数の大きい対流（マントル）から小さい対流（外核）まで、幅広いプラントル数が関係している。ここではプラントル数が低い側に着目し、外核のような液体状態にある金属が熱対流を起こした際に形成される流れのパターンとその時間的な変動について報告する。ある程度の水平スケールをもつ系において、液体金属による熱対流を起こすと乱流状態が組織化された長波長のセル状のパターンが形成される。そしてそのパターン全体が流れの周回時間スケール程度での準周期的な振動を繰り返すことが分かった。高解像度かつ長時間積分のシミュレーションによってこのダイナミックな振動の詳細を明らかにした。

キーワード：低プラントル数, 液体金属, 熱対流, パターン, 振動

1. はじめに

本課題でテーマとしているプラントル数(Pr)とは、流体の物性値である動粘性率（言い換えると運動量の拡散率）と熱の拡散率との比である。プラントル数が高い流体は例えば水飴であり、地球のマントルを構成する岩石も地質学的な時間スケールでは高プラントル数の流体として扱うことができる。その一方、プラントル数が低い流体の代表は熔融した液体状態の金属である。つまり液体金属は水銀に典型的に見られるようにサラサラであるとともに熱をととも伝えやすい。地球の外核は熔融状態にある鉄の合金と考えられていて、そのダイナミクスの解明には低プラントル数での対流の振る舞いの理解が不可欠である。

空気や水による対流の振る舞いは日常生活でも馴染み深くかつ重要であるし、より大きなスケールでは気象や海洋の現象につながっている。そしてその対流の様子は微粒子によって容易に可視化することができ、パターン形成や遷移といった非線型物理の研究にも格好の材料を提供してきた[1]。重力場において平行平板間の流体の上下に温度差を与えた設定で起こる熱対流をレイリー・ベナール対流という。熱膨張により浮力が発生することが流れを生じる原因である。対流の様相は上に述べたPrと、浮力の相対的な大きさを表す無次元数であるレイリー数(Ra)によって見事に整理されている。対流のない静止した状態から対流が発生する遷移点は 10^3 程度の大きさをもつ臨界レイリー数で記述され、これはPrには依存しない。より大きなRaで現れる対流パターンは、臨界Raの直上での2次元的な定常ロール構造からセル的な構造への3次元化、そして時間変動の発生、さらには乱流へと発展していく。そしてこのような状態変化はPrに大きく依存することが知られている[2]。

さて、対流パターンに関するこのような従来の研究はPrが概ね1より大きい範囲についてが対象であった。こ

れには可視化手法が大きく関わっている。空気や水、そして水飴やオイルのような光が透過する流体の場合は、光をあてることによる流れ場の可視化が大きな威力を発揮する。しかしながら低Pr流体の代表である液体金属はその表面で光を反射するため微粒子を分散させても内部の流れの様子が観察できない。近年、超音波を用いた流速分布計測法が発展し、流体に追従して移動する微粒子からの超音波の反射波についてそのドップラーシフトを解析することで流れ場の情報をラインで取得できるようになった[3]。これにより流れ場が持つ構造の波長やその時間的な変動をかなり細かく観察できる。超音波による流れ場の可視化の実現である[4-6]。

我々は室温で液体であるガリウム合金を用いて、中程度のアスペクト比（水平スケール）をもつ容器内で熱対流の実験を実施した。超音波による複数の計測線を設定することにより、容器内で実現している対流パターンの詳細を描き出すことに成功した。それによると、各位置での時間変動から見ると乱流状態にあると言えるようなRaに達した状態にも、ロール状あるいはセル状の形態を示す大規模な構造が存在する。これは乱流の組織化と考えられる。さらに興味深いことに、このような大規模構造は準周期的な振動を繰り返しており、その周期は流れの周回時間とほぼ同じということが明らかになった[6]。室内実験によるこのような結果を受けて、ここで我々は数値シミュレーションにより同様の系を扱い現象の再現を試みるとともに、振動の詳細の解明とメカニズムの理解を進めた。

2. 系の設定

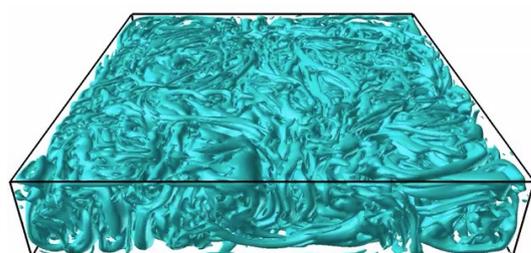
実験と同様な形状として、層厚1に対して水平スケールが両方向に等しいアスペクト比5の正方形の形状を設定した。実験に合わせて壁は全て固着の速度条件であり、温度は上下面でそれぞれ一定、側壁は断熱としている。ガリウム合金の物性値を用いて $Pr = 0.03$ とした。これは

十分に低 Pr といえる世界である。流体は Boussinesq 近似で扱い、有限差分法によって解いている。使用したコードは電磁流体を扱うために開発した計算コードから磁場に関する部分を除いたものであり、詳細は[7]を参照されたい。OpenMP と MPI により地球シミュレータでの実行に適した並列化をしている。用いた格子は各方向に等間隔であり、最大の解像度では水平方向が 2560×2560 、鉛直方向が 512 という大規模な計算である。この高解像度の結果を基準としてより小さい規模での結果を比較検討し、同様の結果が得られることが確認できたので、多くのケースでは中規模の格子数を採用している。十分に長い時間積分を実施し熱的なバランス状態が達成された後に、さらに長時間の計算を行なってパターンの時間的な変化を追うとともに各種の統計量を取得した。

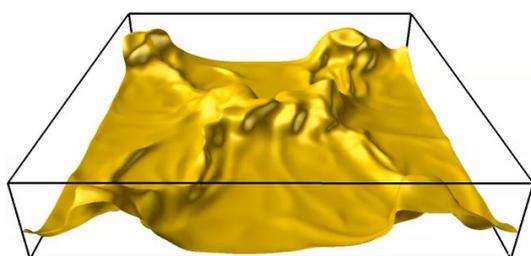
3. 結果

まずは室内実験による超音波流速分布計測の結果と比較した。数値シミュレーションによる結果は定性的にも定量的にも実験結果とよく一致し、本シミュレーションの妥当性を確かめることができた[8]。室内実験で行っているのはライン計測の組み合わせなので、対流パターンの全体像をそれのみから把握するのは難しい。そこで数値シミュレーションの結果からパターンの全体像を例示する。

図 1 ではある瞬間における、(上)速度場から求めた渦の構造、(下)高温の等温面、を立体的に示している。これは $Ra = 1.2 \times 10^5$ という条件のものであり、発達した乱流状態にある。



isosurface of Q_{3D}



isosurface of $T = 0.8$

図 1. ある瞬間における渦の分布(上)と等温面の様子(下)。渦は速度勾配テンソルの第二不変量のある正の等値面で、温度は 0.8 の等温面で表している。パラメータの設定は $Pr = 0.03$, $Ra = 1.2 \times 10^5$ である。

上図の速度場には多数の細かい渦が存在し乱流であることが実感できるとともに、下図の温度場を見ると水平スケールの大きいセル状の構造があることが分かる。これがいわゆる乱流中に存在する組織化された大規模構造である。

このようなパターンの時間的な変動を図 2(上)で見してみる。これは超音波による流速分布計測で得られるのと同様の表示を、シミュレーションの結果から作成したものである。この図の横軸は時間で縦軸は水平方向の位置である。色は赤青で流速の向きおよびその濃淡で大きさを表しており、両側の壁から中央に向かう大規模な流れの存在が見てとれる。この測線は容器の下面から 1/4 の高さに設定しているので、容器の中央で上昇し壁際で下降するような向きの大規模流が起こっていることが分かる。当然ながら図 1(下)での等温面の形状と整合的である。中央($x=2.5$)に向かう斜めの細い帯は個々の渦に対応し、多数の小さい渦が大規模流に乗って移流していることを反映したものである。そしてここに 2 回半ほど見えている赤青のゆっくりとした変動が、特に着目している大規模パターンの準周期的な振動である。流れが強弱を繰り返していることが分かる。図 2(下)はこの時系列のうち時刻 0.5 という瞬間において容器中央の鉛直断面を見たものであり、紙面に直交する方向の渦度の向きと大きさを色で表している。図 1(上)に見られる多数の渦を鉛直断面で見ることに対応する。

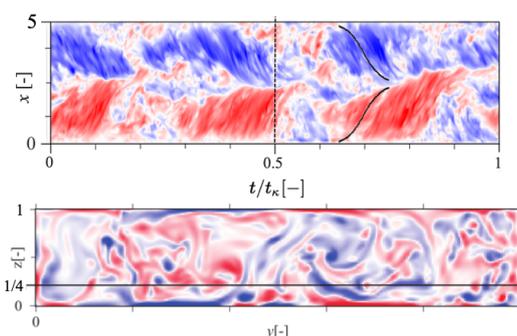


図 2. (上)水平 x 方向の流速の時空間マップ：横軸は熱拡散時間、縦軸は x 方向の位置であり 5 は奥の壁にあたる。赤は位置 0 から遠ざかる流れ、青は近づく流れを表す。(下)時刻 0.5 での容器中央の鉛直断面。色は面に直交する渦度を表す。 $z=1/4$ にある水平の黒線は上図で水平流速を見ている位置を示す。

次に系全体を特徴づける統計量の時間的な変化を示す。図 3 には全体積で計算した root mean square 速度 (U_{rms} : 青) と、系の熱輸送量を表すヌッセルト数 (Nu : 赤) の時系列を示す。横軸の時間は層厚を用いて無次元化した熱拡散時間である。rms 速度と Nu はよく同期して変動しているとともに、ともに準周期性が顕著である。流速が大きいタイミングでは Nu も大きいことが分かる。周波数解析をするとこの周期に対応する明瞭なピークが得られる。こ

これらの統計量に見られる準周期性は、図2(上)で示したような対流パターン全体の振動によく対応する。ただし rms 速度および Nu の振動周期は、パターン全体が振動する周期のちょうど半分であることが分かった。一方、代表的な流速から流れがセル構造を周回する時間を見積ると、パターン全体が振動する周期とほぼ等しいことが確かめられた。

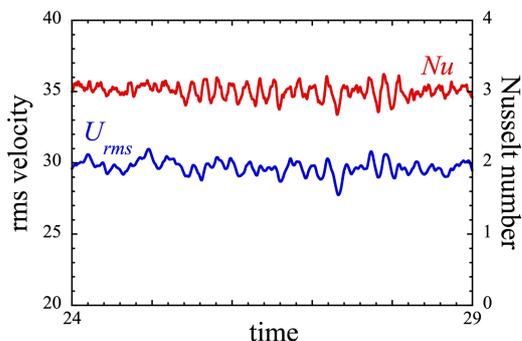


図3. 全体積での rms 速度 (青: 左の縦軸) とヌッセルト数 (赤: 右の縦軸) の時間変動。パラメータの設定は同じく $Pr = 0.03$, $Ra = 1.2 \times 10^5$ 。

では更にパターン全体が示す振動の特徴を調べてみる。準周期性をもつ繰り返し現象であることに着目し、図3のような統計量を指標にして振動を時間方向に分割する。そして振動の位相区分ごとに多数の振動についての平均値を計算する。つまり位相平均によるスタッキングである。多数の平均をとることにより図1(上)に見られるような微細でランダムな渦構造は平準化され、大規模構造を取り出すことができる。位相区分ごとに平均しているので、大規模構造のゆっくりした振動に関する情報は保たれている。

ここではパターンの振動 16 回を用いてそれぞれを 16 の位相に分割し、位相ごとの平均値を算出した。平均操作は速度の 3 成分、温度、圧力のそれぞれについて実施した。図4から図7が実際の位相平均による結果である。図4は層厚の中央の高さでの水平温度分布を描いたもので、左を位相0とすれば右はその半周期後のパターンである。セル状の構造が xy という水平の二方向に交互に伸び縮みを繰り返す、というのがこの対流場に特徴的な振動の正体であることが明らかとなった。左右のパターンは90度回転させた関係にあり、rms 速度や Nu は両者で同じ値をとる。このことがパターンの変動周期の半分の周期が rms 速度と Nu に見られたことの原因である。容器の形状が正方形であるため xy の二方向は等価であるということが、このように整然とした振動を生み出す原因だと考えられる。

図5には u_x , u_y , u_z の速度場からの位相平均を組み合わせ求めて大規模な流れの構造を示す。構造をわかりやすく表現するため、大規模な循環の中心付近に位置する流線のみを描いている。また、その流線が位置する高さを青(下面)から赤(上面)の色で表して、大規模循環

の立体的な構造を把握できるようにしている。図4の温度場とは $1/4$ 周期ずれた位相のパターンを示しているが、温度場と速度場の形状がよく対応していることが見てとれる。

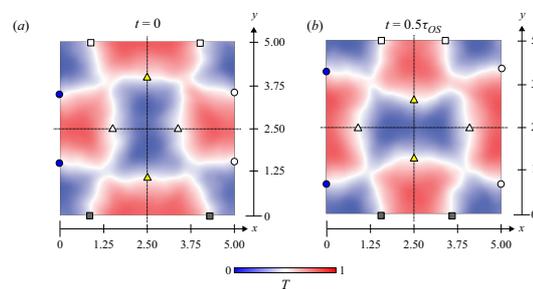


図4. 位相平均により求められた温度場。流体層の中央の高さでの温度分布を示す。左が位相0、右がその半周期後の平均構造。

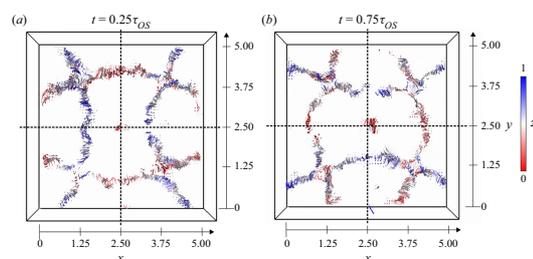


図5. 位相平均により求められた速度場から、大規模な循環の中心に近い領域の流線を抽出して表示。色は流線の鉛直方向の位置を示す。左が $1/4$ 周期、右が $3/4$ 周期における平均構造。

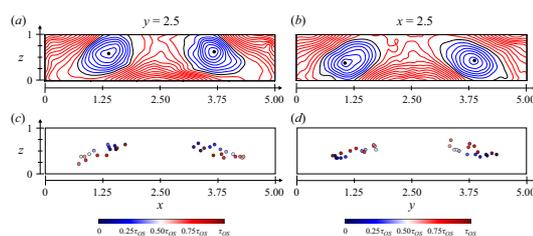


図6. 位相平均により求められた圧力場。上の左右は容器の中央で交差する鉛直断面での圧力分布。平均値を黒、低圧を青、高圧を赤の等値線で表示。圧力の極小が循環の中心に対応する。下の左右はそれぞれの鉛直断面における 16 分割した各位相での圧力極小の位置。各点の色は一周期の中でのタイミングを表しており、下に示した青赤のカラーバーがその位相である。循環の中心は水平・鉛直の両方向に振動している。

同様に、位相平均で求めた圧力場を図6に示す。これは容器の中央で直交する2つの鉛直断面についてのものである。平均より低い圧力を青、高い圧力を赤の等値線で描いており、大規模流の循環の中心付近は圧力が極小となっている。上の2枚はある特定の位相であるのに対して、下の2枚では圧力が極小となる位置が位相によってどのように変化していくかを表示している。その位置は水平方向のみならず鉛直方向にも移動しており、図5に流線の色で示した事柄の別の表現となっている。この両断面での循環の中心位置の移動は、長軸が非常に長く傾いた楕円状の軌跡をとっていることが分かる。

図5と図6に示した大規模循環の中心付近に着目し、異なる視点から図示したのが図7である。大規模構造の振動は平面的ではなく立体的であるというのが重要なポイントである。大規模循環の振動の様子をイメージするには両端を持って回転させる縄の運動を思い浮かべるとよい。実際に我々はこれをjump rope vortex (つまり回転する縄跳びの縄のような渦構造)と呼んでいる[5, 8]。ただしアスペクト比が5というここで調べたような広い場合には、回転する縄は4組あることになりその挙動は複雑である。

これら3.結果で述べた事項の詳細は、open accessの[8]で報告しているのでぜひ補足の動画とともに参照されたい。

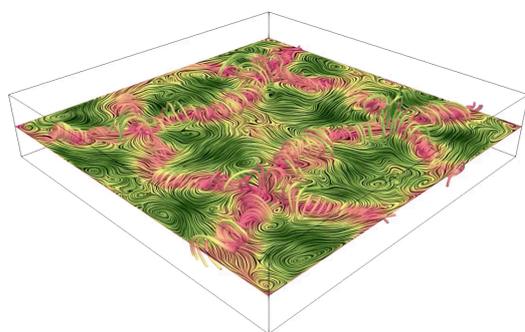


図7. 立体的に見たjump rope vortexの構造。位相平均により求められた速度場から、大規模な循環の中心に近い領域の流線を強調して赤で描いたもの。動画では回転・振動の様子がよく分かる。

4. 議論とまとめ

液体状態の金属、つまり代表的な低プラントル数の流体の上下に温度差を与えて熱対流を起こし、実現される対流パターンを調査した。室内実験で超音波により可視化されたものと同様の挙動を、高解像度の数値シミュレーションによって再現することに成功した。

アスペクト比が5という比較的的水平スケールの大きい形状では、乱流が組織化されたセル状の大規模構造が存在し、しかもその構造が準周期的な振動を繰り返すということが顕著な特徴である。その振動の周期は大規模流がセルを周回する時間とほぼ等しい。準周期性に着目し

て、位相平均により大規模構造の振動の形態を明らかにした。その結果、縄跳びの縄の回転の組み合わせでイメージされるような立体的な運動が、大規模流の振動として抽出された。

ところでこのように広い形状において、空気や水などPrが1に近い流体による熱対流では、対応するような全体が同期した振動現象は観察されない。代わりに生じているのはむしろ境界層のランダムな剥離である。こうした振る舞いの差異は温度境界層の実効的な厚さにあると考えている。つまり低Prの場合はその大きな熱拡散性のため、高Raにおいても温度境界層は厚く保たれている。ここで解明したのは低Prならではの興味深い現象であり、地球の外核でのメカニズムにも重要な示唆を与えるものと考えている。

謝辞

本報告で述べた液体金属による熱対流の室内実験は、北海道大学大学院工学研究院の流れ制御研究室ならびにドイツのヘルムホルツセンター・ドレスデン・ロッセンドルフにて共同で実施したものである。ここに記して感謝の意を表す。

文献

- [1] M. Lappa, "Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability," Wiley, 2010.
- [2] R. Krishnamurti, and L. N. Howard, "Large scale flow generation in turbulent convection," Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 78, pp. 1981-1985, 1981.
- [3] Y. Takeda (ed.), "Ultrasonic Doppler Velocity Profiler for Fluid Flow," Fluid Mechanics and its Applications Vol. 101, Springer, 2012.
- [4] T. Yanagisawa, Y. Hamano, T. Miyagoshi, Y. Yamagishi, Y. Tasaka, and Y. Takeda, "Convection patterns in a liquid metal under an imposed horizontal magnetic field," Phys. Rev. E, 83, 063020, 2013.
- [5] T. Vogt, S. Horn, A. M. Grannan, and J. M. Aurnou, "Jump rope vortex in liquid metal convection," Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 115, pp. 12674-12679, 2018.
- [6] M. Akashi, T. Yanagisawa, Y. Tasaka, T. Vogt, Y. Murai, and S. Eckert, "Transition from convective rolls to large-scale cellular structures in turbulent Rayleigh-Bénard convection in a liquid metal layer," Phys. Rev. Fluids, 4, 033501, 2019.
- [7] T. Yanagisawa, Y. Hamano, and A. Sakuraba, "Flow reversals in low-Prandtl-number Rayleigh-Bénard convection controlled by horizontal circulations," Phys. Rev. E, 92, 023018, 2015.
- [8] M. Akashi, T. Yanagisawa, A. Sakuraba, F. Schindler, S. Horn, T. Vogt, and S. Eckert, "Jump rope vortex flow in liquid metal Rayleigh-Bénard convection in a cuboid container of aspect ratio $\Gamma=5$," J. Fluid Mech., 932, A27, 2022.

<https://doi.org/10.1017/jfm.2021.996>

Convection in Various Prandtl Numbers and Its Application to Solid Earth Science

Project Representative

Takehiro Miyagoshi, Center for Mathematical Science and Advanced Technology, Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology

Authors

Takatoshi Yanagisawa ^{*1}, Megumi Akashi ^{*2}, Ataru Sakuraba ^{*3}

^{*1}Volcanoes and Earth's Interior Research Center, Research Institute for Marine Geodynamics, Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology, ^{*2}Helmholtz Zentrum Dresden-Rossendorf, ^{*3}University of Tokyo

The Prandtl number (Pr) of the convecting materials in the Earth and planets have very wide range from 10^{20} (mantle) to 10^{-2} (outer core). In this project, we are dealing both extremes. Here we report the form and temporal dynamics of turbulent Rayleigh-Bénard convection in a liquid metal with a Prandtl number of 0.03 inside a square vessel having an aspect ratio 5. The dynamic behavior is dominated by strong three-dimensional oscillations with a period length that corresponds to the turnover time. Our analysis by the phase averaging reveals that the oscillation is marked by expansion and contraction of a cellular structure, and the axes of circulation behave like rotating jump ropes.

Keywords : low Prandtl number, liquid metal, thermal convection, pattern, oscillation

1. Introduction

The Prandtl number (Pr) is the ratio of material properties of fluids defined as $Pr = (\text{kinematic viscosity})/(\text{thermal diffusivity})$. Liquid metals such as molten iron are typical low Pr fluids ($Pr < 0.1$). To understand the nature of Rayleigh-Bénard convection in low Pr is essential for the dynamics in the outer core of the Earth. The critical value of the Rayleigh number (Ra) for the onset of convection ($\sim 10^3$) does not depend on Pr. On the other hand, the behavior of convection after the onset strongly depends on Pr [1,2]. Actually, our knowledge on convection patterns was mainly constructed by experiments using gases, water, and oils whose Pr are around 1 or higher. It has long been difficult to visualize flow patterns inside of liquid metals because of opaqueness, but a method using ultrasonic wave with its Doppler shift enabled that in these two decades [3].

By applying the method to the study of Rayleigh-Bénard convection in liquid metals, very attractive behaviors were observed mainly relating to time-dependent patterns [e.g. 4-6]. We found that there exists roller or cellular pattern as an organized structure of turbulence around $Ra \sim 10^5$. In addition, the structure shows quasi-periodic oscillations whose period length is comparable to the turnover time of the flow [6]. Here we conducted further study to make clear the detail of such kind of oscillations. The work is a combination of laboratory experiments and numerical simulations. We checked the reliability of numerical results by comparing them with the laboratory experiments. In this report, we introduce the aspect of numerical simulations.

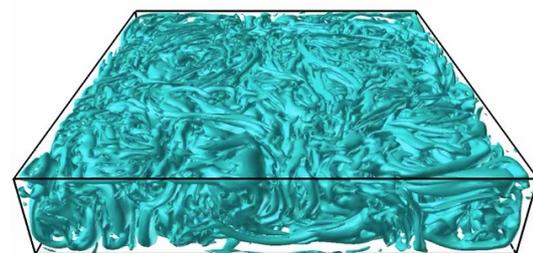
2. Setting

The target geometry is a square vessel having aspect ratio 5. At all boundaries, the flow velocity is fixed to zero as laboratory experiments. Temperature is kept constant at the top (cold) and bottom (hot) boundaries with insulating side walls. We treated the

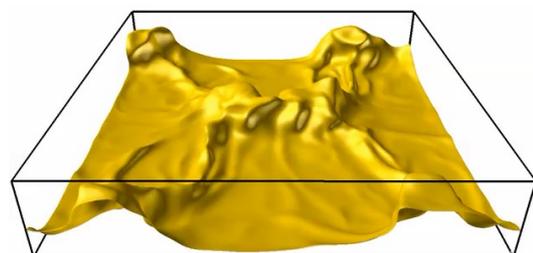
fluid by the Boussinesq approximation and the Pr of the fluid is 0.03. The code for numerical simulation is our original one based on the finite difference method and optimized for the usage on the Earth Simulator. The maximum grid points for the simulation are $2560 \times 2560 \times 512$. The details are referred in [7,8].

3. Result

Instantaneous profiles of flow velocity field and temperature field are shown in Figure 1. The velocity field is marked by numerous small vortices reflecting its turbulent state, while the temperature field is by a cellular large-scale structure.



isosurface of Q_{3D}



isosurface of $T = 0.8$

Fig. 1 (top) Snapshot of vortices drawn by a flow velocity field. (bottom) Snapshot of a temperature field. The setting parameters are $Pr = 0.03$ and $Ra = 1.2 \times 10^5$.

In Figure 2, time variations of two global quantities are presented. One is the root mean squared velocity for the entire volume, and the other is the Nusselt number of the system. Both values are correlated well and showing quasi-periodicity. Time variation of these values reflects the oscillation of the large-scale structure.

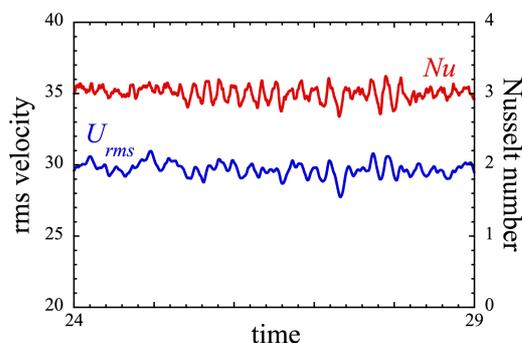


Fig. 2 Time variations of the rms velocity (blue) and the Nusselt number (red). Quasi-periodicity is dominant.

To extract the style of oscillation of large-scale structure, we applied phase averaging for the velocity, temperature, and pressure fields by utilizing the quasi-periodicity. Each oscillation is divided into 16 phases and stacked over many oscillations. Small vortices are smoothed out by this procedure and we can obtain clear structural variation. Figure 3 shows the stream lines calculated by the phase averaged velocity field. It is for a certain phase of the oscillation. In this figure, around the circulation axes of the large-scale structure is emphasized by red color. We call it “jump rope vortex”. The “jump rope vortex” structure was originally discovered by [5] in a cylinder of aspect ratio 2. As the name suggests, this is a vortex with a curved axis performing a cycling motion in three-dimensional space. Our results confirm the existence of such kind of flow structure also in a wider square geometry of aspect ratio 5.

You can refer the details of the result noted here in [8] (open access) with attractive movies.

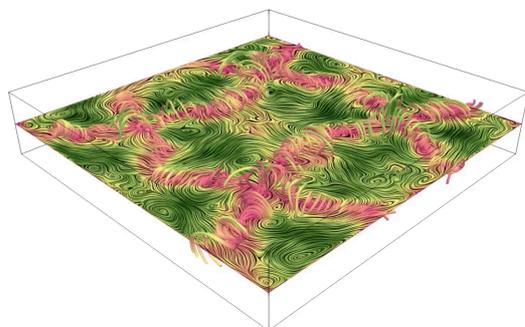


Fig. 3 Large-scale structure extracted by the phase averaging. The red color indicates surrounding portions of circulation axes. We call this “jump rope vortex”.

4. Summary

The convective flow of a liquid metal ($Pr = 0.03$) in this square vessel is fully turbulent. Our analysis succeeded in clarifying the complex three-dimensional structure of the large-scale flow. The dominant feature is that there exist four vortices at the same time, with the axes of the circling motion being aligned parallel to the sidewalls. Combined motion of four “jump rope vortices” is convenient for imaging the style of oscillation. The dynamics of the “jump rope vortices” is strongly correlated and characterized by the fact that the respective opposite vortices move towards the center or the sidewall at the same time, while the other pair of vortices rotates with an offset of half a period. The very interesting question to be solved in our future work is whether this type of oscillatory structure exists in wider parameter ranges of the aspect ratio and the Rayleigh number.

Acknowledgement

Laboratory experiments of convection using liquid metal noted here were conducted at Laboratory for Flow Control in Hokkaido University and Helmholtz Zentrum Dresden-Rossendorf. We thank all coworkers in these institutes for collaborations and fruitful discussions.

References

- [1] M. Lappa, “Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability,” Wiley, 2010.
- [2] R. Krishnamurti, and L. N. Howard, “Large scale flow generation in turbulent convection,” Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 78, pp. 1981-1985, 1981.
- [3] Y. Takeda (ed.), “Ultrasonic Doppler Velocity Profiler for Fluid Flow,” Fluid Mechanics and its Applications Vol. 101, Springer, 2012.
- [4] T. Yanagisawa, Y. Hamano, T. Miyagoshi, Y. Yamagishi, Y. Tasaka, and Y. Takeda, “Convection patterns in a liquid metal under an imposed horizontal magnetic field,” Phys. Rev. E, 83, 063020, 2013.
- [5] T. Vogt, S. Horn, A. M. Grannan, and J. M. Aurnou, “Jump rope vortex in liquid metal convection,” Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 115, pp. 12674-12679, 2018.
- [6] M. Akashi, T. Yanagisawa, Y. Tasaka, T. Vogt, Y. Murai, and S. Eckert, “Transition from convective rolls to large-scale cellular structures in turbulent Rayleigh-Bénard convection in a liquid metal layer,” Phys. Rev. Fluids, 4, 033501, 2019.
- [7] T. Yanagisawa, Y. Hamano, and A. Sakuraba, “Flow reversals in low-Prandtl-number Rayleigh-Bénard convection controlled by horizontal circulations,” Phys. Rev. E, 92, 023018, 2015.
- [8] M. Akashi, T. Yanagisawa, A. Sakuraba, F. Schindler, S. Horn, T. Vogt, and S. Eckert, “Jump rope vortex flow in liquid metal Rayleigh-Bénard convection in a cuboid container of aspect ratio $\Gamma = 5$,” J. Fluid Mech., 932, A27, 2022.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2021.996>