

# 高プラントル数のスカラーによって形成される密度成層乱流

課題責任者

花崎 秀史 京都大学 大学院工学研究科

著者

花崎 秀史 京都大学 大学院工学研究科

沖野 真也 京都大学 大学院工学研究科

海洋中には熱や塩分の分布によって、時間平均的には下方ほど密度の大きい密度成層がしばしば形成される。高プラントル数のスカラーは、その拡散が遅いため、速度場よりもはるかに細かい構造を有するが [1]、 $Pr=O(10^3)$  のスカラーによって形成される密度成層乱流の最小スケールまで解像する直接数値計算はこれまでおこなわれてこなかった。本研究では、高 Prandtl 数 ( $Pr=7$  と  $Pr=700$ ) のスカラーによって形成される密度成層乱流を直接数値計算によって調べる。

密度成層を形成するスカラーの攪乱は、浮力の効果が大スケールの運動に限られている初期の時刻においては、空間的に一様に分布し、また、Kolmogorov 波数と Batchelor 波数の間の高波数領域では Batchelor の  $k^1$  則に従う。これら 2 つの特徴は、パッシブスカラー（浮力をもたず、密度成層に寄与しないスカラー）と同じである。しかし、時間が経過し、浮力の影響が速度場の最小スケールにまで及ぶと、特に  $Pr=700$  の場合、スカラー攪乱が空間的に局在化する様子が見られた。同時に、ポテンシャルエネルギースペクトルにおいては、Kolmogorov 波数と Batchelor 波数の間に平坦な領域 ( $\propto k^0$ ) が見られた。この波数領域において、ポテンシャルエネルギーは鉛直スカラーフラックスを介し、運動エネルギーへと継続的に変換され、その結果、Kolmogorov スケール以下のスケールがもつ運動エネルギーが大幅に増加することが確認された。

キーワード：成層流体, 乱流, 高プラントル数, エネルギースペクトル, 直接数値計算

## 1. 緒言

大気・海洋中における熱・物質の拡散や工業製品中の熱輸送の効率化など、地球物理学や機械工学上の諸問題を考える上で、乱流中のスカラーの輸送現象の理解は重要なテーマである。

流れに影響を及ぼすことなく、受動的に運動する“パッシブスカラー”のスペクトルに関する研究として Batchelor [1] が挙げられる。Prandtl 数（流体の動粘性係数に対するスカラー拡散係数の比）の大きいスカラーは、その拡散が遅いため、速度場に比べて非常に小さいスケールの攪乱を有する。具体的には、 $Pr \gg 1$  のスカラーは  $k_{B*} = Pr^{1/2} k_K$  で定義される Batchelor 波数において散逸する ( $k_K$  は Kolmogorov 波数)。また、散逸移流領域 ( $k_K < k < k_{B*}$ ) において、スカラースペクトルが波数  $k$  の -1 乗に比例することが理論的に示されている [1]。実際に  $Pr \gg 1$  の場合について Yeung et al. [2] は直接数値計算によって、Batchelor のスケールリングが成り立つことを確認している。

一方、密度成層乱流、すなわち熱や塩分のように浮力を介して流れに影響を及ぼす“アクティブスカラー”が鉛直方向に勾配をもった流体中の乱流について、これまで数多くの研究がなされてきた (e.g. [3-5]) が、その多くの場合、 $Pr=1$  が対象であり、実用上重要な対象である、水中における熱と塩分の Prandtl 数（それぞれ 7 と 700 である）とは大きな差がある。本研究では、Prandtl 数が 7 と 700 のスカラーによって形成される密度成層流体中の乱流を大規模直接数値計算によって解析し、流れの Prandtl 数依存性について議論する。

## 2. 対象とする系と数値計算法

周期境界を有する立方体領域中の流体運動を取り扱う。流体は熱 ( $Pr=7$ ) または塩分 ( $Pr=700$ ) によって鉛直方向に一様な密度成層を形成しているものとする。本研究では、減衰乱流、すなわち初期攪乱の時間発展を計算の対象とした。初期速度場として等方的な攪乱を与え、初期密度場は攪乱がないものとした。

系を支配する方程式は、連続の式、ナビエ・ストークス方程式とスカラーの輸送方程式である。フーリエ・スペクトル法によって支配方程式の直接数値計算を実施した。非線形項の評価の際に生じるエイリアス誤差は 3/2 則によって除去した。また、時間積分は 4 次精度のルンゲ・クッタ法により実行した。計算に用いる格子点数は初期には  $4096^3$  点とし、時間の経過につれて高波数成分が減衰するため、途中で格子点数を  $2048^3$  点に減らして計算を続けた。

本研究では、初期攪乱の rms 速度と積分長に基づく初期 Reynolds 数を 50、初期 Froude 数を 1 として計算を実施した。以後の結果では、全ての有次元量は初期攪乱の rms 速度と積分長、平均スカラー勾配を用いて無次元化して示す。

## 3. 計算結果

まず、図 1 に減衰初期 ( $t=6$ ) における、 $Pr=7$  と  $Pr=700$  のスカラーがもつポテンシャルエネルギー  $T^2/2Fr_0^2$  の空間分布を示す。この時刻においては、 $k_{Oz} = (N_*^3/\epsilon_*)^{1/2}$  (ただし、 $\epsilon_*$  は運動エネルギー散逸率) で定義される Ozmidov 波数は Kolmogorov 波数よりも小さく、浮力の効果は大スケールの運動に限定されている。このとき、 $Pr$  の値によらず、

ポテンシャルエネルギーの分布は概ね等方的である。さらに、Prandtl 数が大きいほどスカラーの拡散は遅いため、 $Pr=700$  の場合に、より細かな構造が存在している。

また、 $Pr=700$  の場合、広い波数領域 ( $1.5 \leq k \leq 40$ ) において、ポテンシャルエネルギースペクトルが  $k^{-1}$  に比例することが確認できた (図は省略)。これは、パッシブスカラーに対する Batchelor の理論 [1] が、アクティブ (浮力をもつ) スカラーに対しても、浮力の効果が大スケールに限定されている以上は成り立つことを示唆している。

減衰乱流では、時間の経過とともに Ozmidov 波数は増加し、浮力の影響はやがて小スケールにまで及ぶ。次に、浮力の効果が Kolmogorov スケールよりも十分小さいスケールにまで及んだ時刻  $t=30$  における結果を示す。図 2 は  $Pr=7$  と  $Pr=700$  におけるポテンシャルエネルギーの空間分布である。いずれの図においても図 1 と比べて水平方向に伸びた扁平な構造が見られる。これは浮力によって鉛直方向の運動が抑制された結果であり、成層乱流に見られる一般的な特徴である (e.g. [3])。図中の赤い塊で示される高ポテンシャルエネルギー領域は Prandtl 数にあまり依存しないが、 $Pr=700$  ではその中に多数の微細な構

造が含まれている。すなわち、 $Pr=700$  (塩分成層) の場合には、塩分攪乱の大きい領域が空間的に局在するという特徴が現れている。

最後に、時刻  $t=30$  におけるエネルギースペクトル  $E_k$ ,  $E_p$  を図 3 に示す。 $Pr=7$  と  $Pr=700$  におけるポテンシャルエネルギースペクトルを比較すると、Kolmogorov 波数以下の大スケールに大きな違いは見られない。これは図 2 に示したポテンシャルエネルギー分布の大スケールの構造が Prandtl 数に依存しないことに対応している。一方、Kolmogorov 波数以上の小スケールにおいて、 $Pr=700$  のほうがより多くのエネルギーを保有していることが分かる。しかしながら、 $t=6$  のときに見られた  $k^1$  則は成り立たず、その代わりに、 $7 < k < 30$  の波数域において平坦なスペクトル ( $\propto k^0$ ) をもつことが確認できる。平坦なスペクトルは図 2 に見られた微細な攪乱に対応する。一方、運動エネルギースペクトルに着目すると、 $k \sim 20$  付近に盛り上がりが見られる。これは、ポテンシャルエネルギーが鉛直スカラーフラックスを介し、運動エネルギーへと変換され、小スケールの運動エネルギーが大幅に増加したためである。

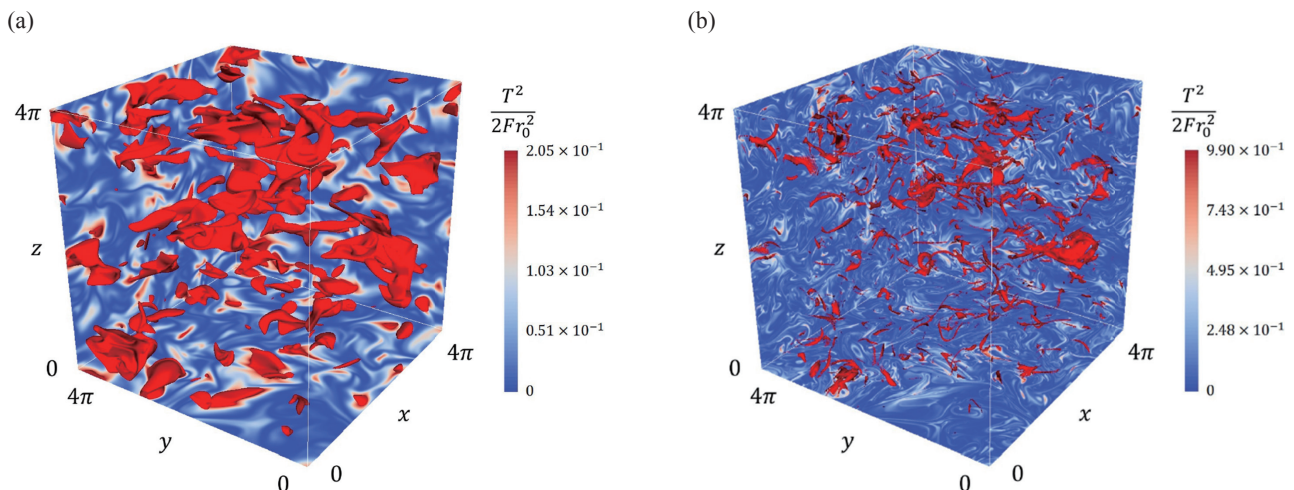


図 1 時刻  $t=6$  における (a)  $Pr=7$  と (b)  $Pr=700$  のスカラーがもつポテンシャルエネルギーの空間分布。赤は最大値の 30% 等値面、カラーマップは  $x=4\pi, y=4\pi, z=0$  における面内分布。

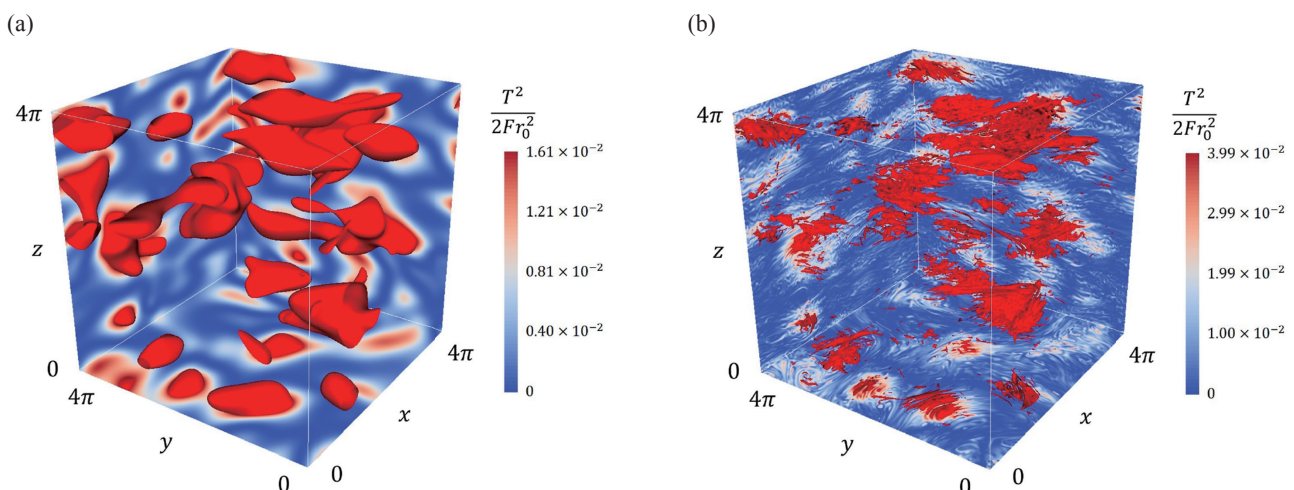


図 2 時刻  $t=30$  における (a)  $Pr=7$  と (b)  $Pr=700$  のスカラーがもつポテンシャルエネルギーの空間分布。

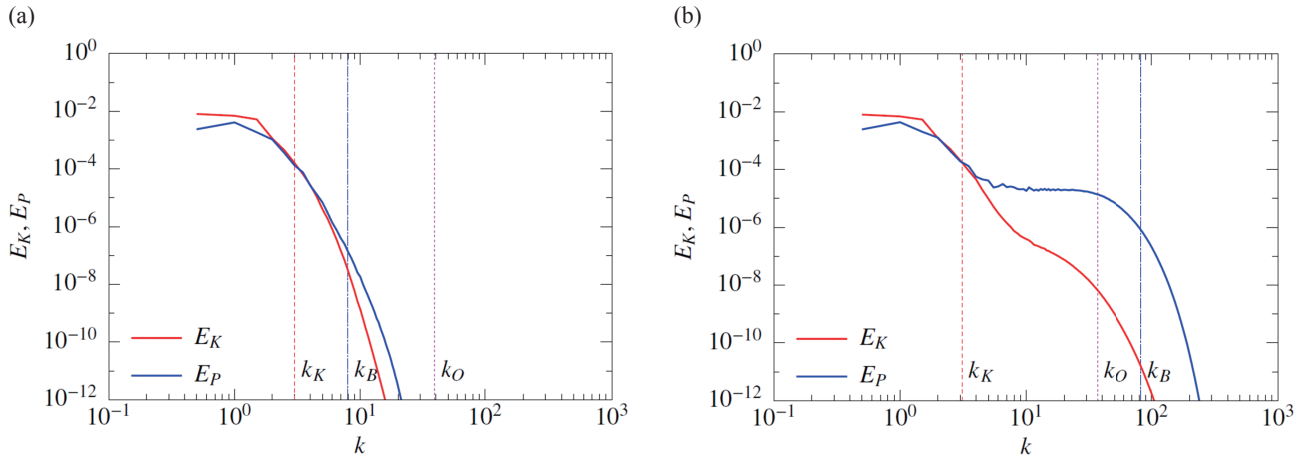


図3 時刻  $t=30$  における (a)  $Pr=7$  と (b)  $Pr=700$  に対する運動エネルギースペクトル (赤) とポテンシャルエネルギースペクトル (青)。Ozmidov 波数  $k_o$ 、Kolmogorov 波数  $k_K$ 、Batchelor 波数  $k_B$  が鉛直線で描かれている。

#### 4. 結言

高 Prandtl 数のスカラーによって形成される密度成層乱流の直接数値計算を実施し、 $Pr=7$  と  $Pr=700$  の計算結果を比較することで、以下の知見を得た。

成層の影響が Kolmogorov スケールにまで及んでいないとき ( $k_o < k_K$ )、スカラー攪乱の分布は等方的であり、Prandtl 数の大きいスカラーのほうがより細かい構造を有する。また、 $Pr=700$  のスカラーに対するポテンシャルエネルギースペクトルは 1 桁以上にわたって  $k^{-1}$  に比例する。これらの点で、アクティブスカラーであっても、浮力の効果が大スケールに限定されている限り、パッシブスカラーと同様の振舞いを示す。

時刻の経過とともに Ozmidov 波数は増加し、最小スケールの運動にまで浮力の影響が及ぶようになる ( $k_o \gg k_K$ ) と、高 Prandtl 数 ( $Pr=700$ ) のスカラー攪乱は空間的に局在する。また、ポテンシャルエネルギースペクトルは Komogorov 波数以下の低波数領域では Prandtl に依存しない。 $Pr=700$  のスカラーは高波数領域により多くのエネルギーを有するが、時刻初期に見られた  $k^{-1}$  則に従う領域はなくなり、代わりに平坦なスペクトル ( $\propto k^0$ ) が現れる。この平坦な領域において、ポテンシャルエネルギーが鉛直スカラーを介して運動エネルギーへと変換されるため、運動エネルギースペクトルは  $Pr=7$  の場合に比べ、大幅に大きな値をもつ。

以上のような特異な性質が  $Pr=700$  の場合に生じた理由は明らかではない。例えば、エネルギースペクトルの収支を吟味するなど、現象の理解に向けたより詳細な解析が必要である。

#### 謝辞

本研究は平成 28 年度地球シミュレータ公募課題により、海洋研究開発機構の地球シミュレータを利用して得られたものである。また、本研究の一部は平成 28 年度 HPCI システム利用研究課題 (課題番号: hp160108) により、東北大学サイバーサイエンスセンター SX-ACE を利用して得られたものである。

#### 文献

- [1] G. K. Batchelor, “Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid”, J. Fluid Mech. 5, pp.113-133, 1959.
- [2] P. K. Yeung, D. A. Donzis, and K. R. Sreenivasan, “Simulations of three-dimensional turbulent mixing for Schmidt numbers of the order 1000”, Flow, Turbul. Combust. 72, pp.333-347, 2004.
- [3] O. Métais, and J. R. Herring, “Numerical simulations of freely evolving turbulence in stably stratified fluid”, J. Fluid Mech. 202, pp.117-148, 1989.
- [4] J. P. Laval, J. C. McWilliams, and B. Dubrulle, “Forced turbulence: successive transition with Reynolds number”, Phys. Rev. E 68, 036308, 2003.
- [5] G. Brethouwer, P. Billant, E. Lindborg, and J. M. Chomaz, “Scaling analysis and simulation of strongly stratified turbulent flows”, J. Fluid Mech. 585, pp.343-368, 2007.

# Turbulence in a Density Stratified Fluid Generated by a High-Prandtl-Number Scalar

Project Representative

Hideshi Hanazaki Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

Authors

Hideshi Hanazaki Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

Shinya Okino Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

We have investigated the turbulence in a fluid stratified by a high-Prandtl-number scalar such as salinity ( $Pr=700$ ) and heat ( $Pr=7$ ), by means of a direct numerical simulation which does not invoke a turbulence model. In the initial decay of turbulence, i.e. when the buoyancy effect is limited to large scales, scalar fluctuations exist homogeneously in space, and the potential energy (i.e. variance of scalar fluctuations) has a spectrum proportional to  $k^{-1}$  at high wavenumbers between the Kolmogorov wavenumber and the Batchelor wavenumber. These two characteristics are the same as the passive scalar which does not have a buoyancy effect. However, as time proceeds and the buoyancy begins to affect the fluid motions at the smallest scales, salinity fluctuations ( $Pr=700$ ) begin to show a spatially localized structure. At the same time, the corresponding potential energy begins to show a flat spectrum ( $\propto k^0$ ) between the Kolmogorov and Batchelor wavenumbers, where the potential energy is converted persistently to the kinetic energy via the vertical scalar flux. These localization and the flat spectrum have been observed only for the very-high Prandtl number of  $Pr=700$  and not for  $Pr=7$ .

**Keywords:** Stratified Fluid, Turbulence, High Schmidt Number, Energy Spectrum, Direct Numerical Simulation

## 1. Introduction

The atmosphere and the ocean, when temporary averaged, are the density stratified fluids with a larger density at lower altitude. The oceanic flow is governed by the distribution of salinity and temperature. The salinity, in particular, has a very small diffusion coefficient, so that the Prandtl number  $Pr$ , which is the ratio of the kinematic viscosity of fluid to the diffusion coefficient, is very large ( $Pr=700$ ). Therefore, the salinity fluctuations decay slowly, and we need to resolve a structure much smaller than the smallest-size eddies in the flow. In this study, we investigate the turbulence in a fluid stratified by a high-Prandtl number scalar such as salinity ( $Pr=700$ ) and heat ( $Pr=7$ ), by means of a direct numerical simulation which does not invoke a turbulence model.

## 2. Numerical Method

We consider a fluid in a cubic region with the periodic boundary condition. The fluid is uniformly stratified in the vertical direction due to heat ( $Pr=7$ ) or salinity ( $Pr=700$ ). We compute decaying turbulence in the stratified fluid, i.e., the temporal evolution of an initially prescribed perturbation. As the initial condition, an isotropic velocity distribution is given, and the scalar perturbation is set to zero.

The system is governed by the continuity equation, the Navier-Stokes equation under the Boussinesq approximation and the transport equation for the scalar. The governing equations are solved by a direct numerical simulation using the Fourier

spectral method. Our time-stepping algorithm is based on the 4th order Runge-Kutta method. We begin the computation with  $4096^3$  grid points, and reduce the grid points to  $2048^3$  to save the computational resource after the high-wavenumber components decay as time proceeds.

The initial Reynolds number  $Re_0$  and the initial Froude number  $Fr_0$ , which are based on the rms velocity and the integral scale of the initial perturbation, are fixed to 50 and 1, respectively. All the dimensional quantities are hereafter non-dimensionalized by the rms velocity and the integral scale of the initial perturbation, and the mean scalar gradient.

## 3. Results

In our simulation, the Ozmidov wavenumber defined by  $k_{Oz}=(N_*^3/\epsilon_*)^{1/2}$  ( $\epsilon_*$ : kinetic energy dissipation rate) is initially greater than the Kolmogorov wavenumber, meaning that the buoyancy effect is limited to the large scales. Then the spatial distribution of the potential energy  $T^2/2Fr_0^2$  is homogeneous for both  $Pr=7$  and  $Pr=700$  (figures are omitted). Small-scale structures are energetic for  $Pr=700$  compared to the case of  $Pr=7$  because a scalar of higher Prandtl number diffuses more slowly. The potential energy spectrum for  $Pr=700$ , i.e. the salinity fluctuation variance, is found to be proportional to  $k^{-1}$  at high wave numbers, as predicted by Batchelor [1]. This means that the active scalar such as salinity exhibits the behavior similar to the passive scalar which does not have a buoyancy effect.

The Ozmidov wavenumber increases with time, and eventually exceeds the Kolmogorov wavenumber. At that point, the buoyancy affects even the smallest-scale of the fluid motion. We show in Fig. 1(a) the spatial distribution of the potential energy for  $Pr=700$  at  $t=30$ , at which the Kolmogorov wavenumber is one order of magnitude smaller than the Ozmidov wavenumber. The salinity fluctuations exhibit a horizontally flat structure because vertical displacements of the fluid is suppressed by the buoyancy. This is a well-known characteristic of stratified turbulence (e.g. [2]). A striking feature of the distribution is intermittency, i.e., salinity perturbation has a spatially localized structure.

We next show the kinetic and potential energy spectra for  $Pr=700$  at  $t=30$  in Fig. 1(b). The potential energy spectrum does not show the  $k^{-1}$  power law, which is found at the beginning of the computation, but a plateau ( $\propto k^0$ ) between the Kolmogorov and Batchelor wavenumbers. This wavenumber range contains significant amount of the potential energy, and corresponds to

the small scale fluctuations in Fig. 1(a). The potential energy in the plateau is converted persistently to the kinetic energy via the vertical scalar flux, leading to a substantial increase of the kinetic energy in sub-Kolmogorov scales ( $k \sim 20$ ).

It should be noted that the localization and the flat spectrum of the scalar have not been observed for  $Pr=7$  (figures are not presented here). The reason why these prominent features appear only for a very-high Prandtl number ( $Pr=700$ ) is still an open question. The energy budget of the spectrum is now under investigation to clarify the mechanisms.

## References

- [1] G. K. Batchelor, “Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid”, J. Fluid Mech. 5, pp.113-133, 1959.
- [2] O. Métais, and J. R. Herring, “Numerical simulations of freely evolving turbulence in stably stratified fluid”, J. Fluid Mech. 202, pp.117-148, 1989.

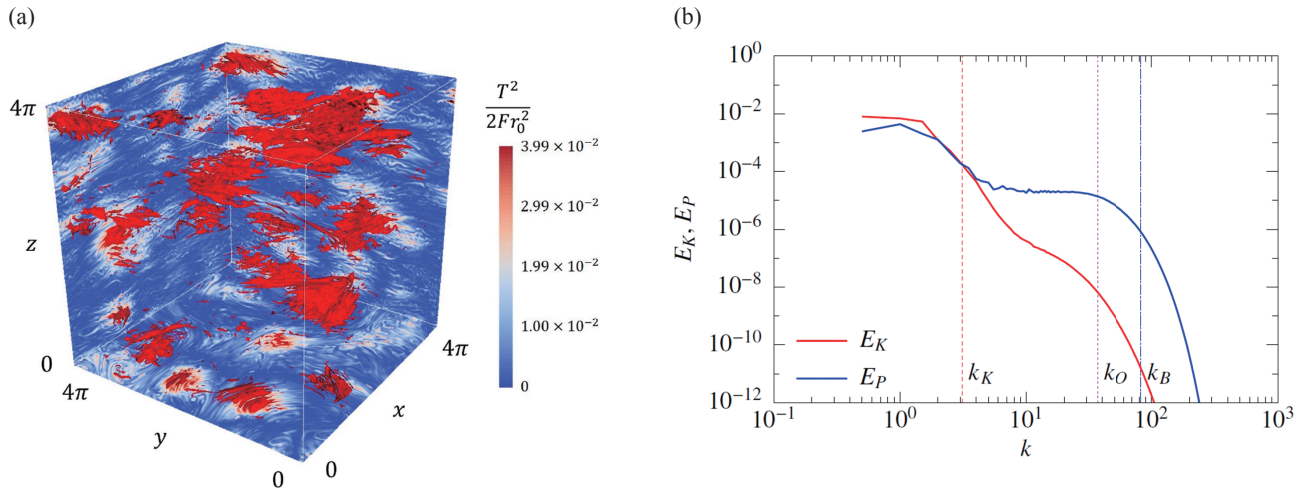


Fig. 1 (a) Isosurfaces of 30% of the maximum potential energy for  $Pr=700$  at  $t=30$ . Spatial distributions at  $x=4\pi$ ,  $y=4\pi$  and  $z=0$  are also shown by colormap. (b) Kinetic and potential energy spectra ( $E_K$  and  $E_P$ ) for  $Pr=700$  at  $t=30$ . The Kolmogorov, Ozmidov and Batchelor wavenumbers are shown by the vertical lines.

