

連続体の散逸を伴う動的挙動解析手法の開発

課題責任者

廣部 紗也子

海洋研究開発機構
研究開発センター

付加価値情報創生部門

数理科学・先端技術

著者

廣部 紗也子^{*1}, 小國 健二^{*1}

^{*1} 海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門 数理科学・先端技術研究開発センター

キーワード: ナビエ・ストークス方程式, 流体解析, 陽解法, 波動方程式, 連続体

1. はじめに

本研究課題は、材料によらず、連続体一般の挙動とエネルギー散逸現象の統一的な扱いを可能にする新たな数値解析手法の枠組みを構築し、エネルギー散逸を伴う連続体の動的挙動を統一的に解析できる汎用数値解析手法の開発を目指している。

連続体の中でも特に流体の挙動は、その支配方程式であるナビエ・ストークス方程式が持つ非線型性により、解析的な解を得ることが困難である。そのため、離散化したナビエ・ストークス方程式を用いた数値解析が広く普及している。しかしながら、離散化されたナビエ・ストークス方程式に対して完全陽解法を用いると、すぐに発散してしまうため、安定的な完全陽解法の開発は未だ困難であり、現在存在する数値解析手法は陰解法によるものだけである[1-3]。

そこで、本研究課題では、離散化されたナビエ・ストークス方程式に対するロバストかつ安定的な完全陽解法のアルゴリズムを提案し、問題ごとのパラメータチューニング (e. g., 安定化項[1, 3]) やチューニングを必要とするモデル (e. g., 乱流モデル[1, 4, 5]) を必要としない解析手法の構築を行う。

2. 離散的な定式化

3次元領域 Ω の節点 $\{\mathbf{x}^\alpha \in \Omega \mid \alpha \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha \leq N\}$ を用いた空間的な離散化を考える。このとき、適切な空間分割図形はDelaunay四面体 $\{\Psi^\beta \mid \beta \in \mathbb{N}, 1 \leq \beta \leq M\}$ である。 Ψ^β の集合によって表される離散化された領域 Ω を $\hat{\Omega}$ とすると、 $\hat{\Omega}$ は Ψ^β の双対な図形であり、 $\mathbf{x}^\alpha$ を母点とするVoronoi分割 Φ^α の集合によっても表すことができる[9]。

この空間分割を、ナビエ・ストークス方程式における場の変数に適用すると、節点での時刻 t における密度と速度はそれぞれ、 $\rho^\alpha(t) \equiv \rho(\mathbf{x}^\alpha, t)$, $v_i^\alpha(t) \equiv v_i(\mathbf{x}^\alpha, t)$ と表される。Voronoi分割 Φ^α での質量保存則と運動量保存則を考えると、 $\rho^\alpha(t)$ と $v_i^\alpha(t)$ に対する離散化された支配方程式はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\rho^\alpha(t + \Delta t) = \rho(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha, t) - \Delta t \left(\rho^\alpha(t) \sum_{\beta=1}^M \Lambda^{\alpha\beta} \varepsilon_{ii}^\beta(t) \right) \quad (1)$$

$$v_i^\alpha(t + \Delta t) = v_i(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha, t) + \Delta t \left(\frac{1}{m^\alpha(t)} \sum_{\beta=1}^M s_j^{\alpha\beta} \left(-p^\beta(t) + \tau_{ij}^\beta(t) \right) \right) \quad (2)$$

ここで、 Δt は時間ステップ、 $\tilde{\mathbf{x}}^\alpha \equiv \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{v}^\alpha(t)\Delta t$, $m^\alpha(t)$ は Φ^α の質量、 $\Lambda^{\alpha\beta}$ は $\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ 部分の体積を Φ^α の体積で割ったものである。また、 $\partial \Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ の外向き単位法線ベクトルを $n_i(\mathbf{x})$ とすると、

$$s_i^{\alpha\beta} = \int_{\partial \Phi^\alpha \cap \Psi^\beta} n_i(\mathbf{x}) dS \quad (3)$$

である。

3. 移流項の評価手法

離散化された支配方程式(1)と(2)において、質量の移流 $\rho(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha, t)$ と速度の移流 $v_i(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha, t)$ は、流体の局所的な並進運動に対応した場の局所的な並進として表されるため、これらの移流項は $\rho^\alpha(t)$ と $v_i^\alpha(t)$ の空間的な補間に基づいて数値的に評価することができる。節点に与えられた物理量の空間補間方法に関しては様々な先行研究があり、多くの手法が確立されているが[6-8]、いずれの手法においても、線形補間に起因する数値粘性と高次補間による節点間での振動とのバランスを上手くコントロールしなければならない。

ここでは、場の不適切な空間補間により発生する数値不安定を避けるため、節点間で発生する変数値のオーバーシュートを完全に抑制する必要がある。そこで、本研究では、高次の空間補間によって与えられる移流項の値に対し、以下のようなサプレッサーを適用する。

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha, t) &= \begin{cases} \rho^{\text{H}\alpha} & \text{for } (\rho^{\text{H}\alpha} - \rho^\alpha(t))(\rho^{\text{L}\alpha} - \rho^\alpha(t)) > 0 \\ \rho^{\text{S}\alpha} & \text{for } (\rho^{\text{H}\alpha} - \rho^\alpha(t))(\rho^{\text{L}\alpha} - \rho^\alpha(t)) \leq 0 \end{cases} \\ v_i(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha, t) &= \begin{cases} v_i^{\text{H}\alpha} & \text{for } (v_i^{\text{H}\alpha} - v_i^\alpha(t))(v_i^{\text{L}\alpha} - v_i^\alpha(t)) > 0 \\ v_i^{\text{S}\alpha} & \text{for } (v_i^{\text{H}\alpha} - v_i^\alpha(t))(v_i^{\text{L}\alpha} - v_i^\alpha(t)) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、 $\rho^{\text{L}\alpha}$, $\rho^{\text{H}\alpha}$, $\rho^{\text{S}\alpha}$ はそれぞれ $\rho(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha, t)$ のうち、線形

補間によるもの、高次の補間によるもの、サブレッサ付きの高次の補間によるものである。 $v_i^{L\alpha}$, $v_i^{H\alpha}$, $v_i^{S\alpha}$ についても同様である。

以上の節点間のオーバーシュートの抑制に加え、本手法では補間にはもう一つの制約条件「 Ψ^β の重心での補間された値は、 Ψ^β の頂点（節点）での値の平均値と一致しなければならない」が必要である。ここではこれを重心制約条件と呼ぶ。数値粘性が解析において許容できる程度であり、この重心制約条件を満たす補間手法として、3次のエルミート補間を $\rho^{H\alpha}$ と $v_i^{H\alpha}$ の数値的な評価に用いる。3次のエルミート補間を適用した際の各変数の詳細な表現方法は本稿では割愛する。

4. 時間積分

離散化された時間ステップを $t^{(k)} \equiv k\Delta t$, $\mathbf{x}^{\alpha(k)} \equiv \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{v}^\alpha(t^{(k)})\Delta t$ とすると、支配方程式(1)と(2)で表される系に対するシンプレクティックオイラー法による時間積分アルゴリズムはアルゴリズム1のようになる。ただし、ここで、この完全陽解法による時間積分が、 $\Delta t < dt_{\max}$ を満たす全ての時間ステップに対して安定になるような $dt_{\max}$ が存在する。

アルゴリズム 1. 時間積分アルゴリズム

for $k = 0$ to $k_{\max}$ do

$$\rho^\alpha(t^{(k+1)}) = \rho(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha(t^{(k)}), t^{(k)}) - \Delta t \left(\rho^\alpha(t^{(k)}) \sum_{\beta=1}^M \Lambda^{\alpha\beta} \varepsilon_{ii}^\beta(t^{(k)}) \right)$$

$$v_i^\alpha(t^{(k+1)}) = v_i(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha(t^{(k)}), t^{(k)}) + \Delta t \left(\frac{1}{m^\alpha(t^{(k+1)})} \sum_{\beta=1}^M s_j^{\alpha\beta} \left(-p^\beta(t^{(k+1)}) + \tau_{ij}^\beta(t^{(k)}) \right) \right)$$

end for

4. 数値解析例

本提案手法を用いた水の流れに関する数値解析例を示す。ここでは、水の状態方程式として以下を用いる。

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0 + K \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0}{\rho(\mathbf{x}, t)} \quad (4)$$

ここで、 p_0 は大気圧、 K は水の体積弾性率、 ρ_0 は大気圧下の静止した水の質量密度である。運動量保存則には、 $p(\mathbf{x}, t)$ は空間勾配をとった形で現れるので、数値解析において $p_0 = 0$ とすることができる。全ての数値解析例において、25°C の水の物性値、 $\rho_0 = 997.05[\text{kg}/\text{m}^3]$, $K = 2.26[\text{GPa}]$, $\lambda = 2.4 \times 10^{-3}[\text{Pa} \cdot \text{s}]$, $\mu = 0.89 \times 10^{-3}[\text{Pa} \cdot \text{s}]$ を用いる。

一つ目の解析例は円管内にある球の周りの流れ (S と呼ぶ)、二つ目の解析例は矩形管内にある円柱周りの流れ (C1 と呼ぶ)、三つ目の解析例は矩形管内にある並んだ2本の円柱周りの流れ (C2 と呼ぶ) である。それぞれの解析において、管への流入速度は、流れが安定 (-s で示す)、不安定だが乱流ではない (-u で示す)、乱流 (-t で示す) になるように設定する。そのため、ここでは合計9つの解析結果 (S-s, S-u, S-t, C1-s, C1-u, C1-t, C2-s, C2-u, C2-t) を示す。

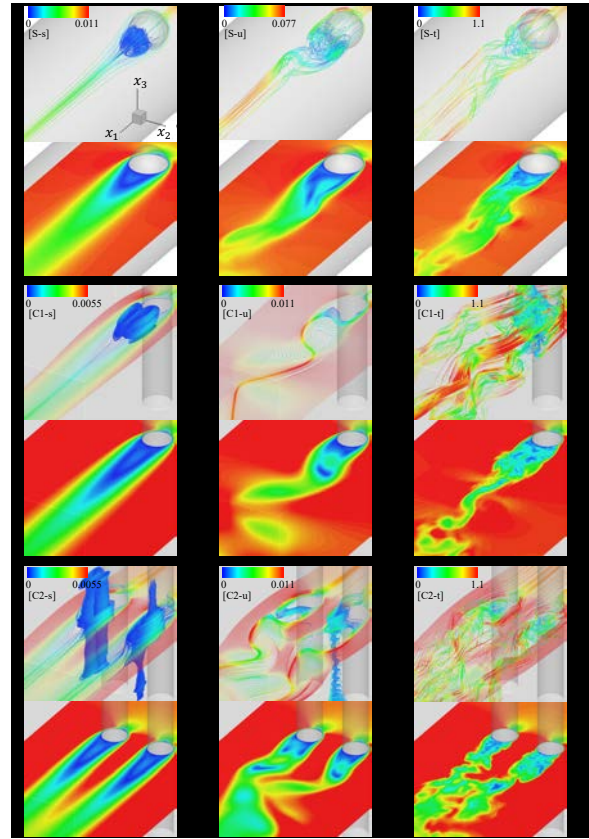


図1. 流線（上部）と速さのコンター図（下部）のスナップショット。[S-s, C1-s, C1-u, C2-s, C2-u]: $t=80.0[\text{sec}]$, [S-u]: $t=16.0[\text{sec}]$, [S-t, C1-t, C2-t]: $t=0.8[\text{sec}]$. コンタースケールの単位は全て $[\text{m}/\text{s}]$.

図1に、それぞれの解析における流線と流れの速さのコンター図のスナップショットを示す。球および円柱周りの流れについては既によく知られているが、図1の結果の多くでも同様の流れを再現することができている。

ここで、C1-s および C2-s における流線に着目すると、C1 と C2 の問題設定では深さ方向に均一なため平面的な流れが発生することが予想されるが、その予想に反し、C1-s と C2-s の流線には垂直方向の竜巻状の流れが形成される。これは、円柱後方の双子渦領域内に、水平速度成分に比べて大きさは非常に小さいが垂直方向の速度成分が存在するためである。また、これらの流線は、定常状態に達した後、全ての時間ステップでほぼ同一となる。したがって、双子渦領域に入ったトレーサ粒子は円柱後方で螺旋状の軌道を描くことで、偶然双子渦領域内から出るまで渦領域内に長時間囚われると予想される。

また、C1-u の解析では、カルマン渦列形成の全過程が再現されており、過渡的な過程で垂直方向の位相差がどのように消失し、ほぼ2次元の流れに発展するかが明らかになっている。

C2-u では、2本の円柱後方で発生するカルマン渦列が相互に干渉することで、対称的な流れ、対称性の破れ、そしてカオス的な乱流に至る過程を見ることができる。こ

のカオスは、流れの中で周期的な構造 (i. e., 隣接するカルマン渦列) が干渉することによって現れ, 1 本の円柱周りの流れが乱流となるレイノルズ数よりもかなり低いレイノルズ数で乱流が観察される。

5. まとめ

本研究では, ナビエ・ストークス方程式を, 並進運動場に重ね合わされた減衰を伴う体積波の波動方程式のオイラー記法として解釈し, 扱えることを示した. これはつまり, 流体の様々な運動 (定常流, 周期的流れ, カオスの流れ, 乱流など) が, 物質の並進運動, 体積波の伝播, および粘性減衰の相互作用の単純な結果として解釈できることを示している. この解釈に基づき, 本研究では, 離散化されたナビエ・ストークス方程式のための安定的な完全陽解法を構築し, すべてのタイプの流れに適用可能な単一のコンピュータコードを開発した.

本手法では, 圧力場 $p(\mathbf{x}, t)$ を独立変数として扱うのではなく, 状態方程式を用いて質量密度場 $\rho(\mathbf{x}, t)$ の従属変数として定式化したことで, 安定的な陽解法を実現している. また, 問題ごとのパラメータチューニングやチューニング可能なモデルを含んでいない.

この手法を用いた解析では, パラメータチューニングやモデルチューニングなしに, 球体や円柱周りの流れの形が流入速度に応じて, 双子渦, カルマン渦, 乱流と変化する様子を再現することができた. 今後は本手法をより複雑な問題設定にも適用し, 手法の妥当性のさらなる検証を進めていく予定である.

謝辞

本研究は, JSPS 科研費 JP20K14812 と JP 23H01497 の助成を受けて実施されたものです.

文献

- [1] J.H.Ferziger, M.Perić, R.L.Street, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer Nature, 2020.
- [2] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method Volume 3: Fluid Dynamics*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [4] S. B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, 2000.
- [5] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, 2006.
- [6] P. J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, 2014.
- [7] F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*, Dover Publications, 1987.
- [8] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer, 2001.
- [9] S. Hirobe, K. Imakita, H. Aizawa, Y. Kato, S. Urata, K. Oguni, “Mathematical model and numerical analysis method for dynamic fracture in a residual stress field,” *Physical Review E* vol.104, 025001, 2021.