

双対な移流ベクトルに基づく乱流スカラー輸送現象の解析

課題責任者

有木 健人 海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門 数理科学・先端技術開発センター (令和7年度課題応募時の所属は筑波技術大学産業技術学部)

著者

有木 健人^{*1}, 芳松 克則^{*2}, 松田 景吾^{*3}

^{*1} 海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門 数理科学・先端技術開発センター (令和7年度課題応募時の所属は筑波技術大学産業技術学部), ^{*2} 名古屋大学未来材料・システム研究所, ^{*3} 海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門 地球情報科学技術センター

キーワード: 乱流, 非線形相互作用, マルチスケール現象, 双対性

1. 研究の背景

大気海洋中の乱流は、熱や物質、栄養塩などを輸送・拡散することで、地球海洋科学の様々な場面に於いて重要な役割を担う。乱流は元来、強非線形かつ強非平衡な現象であるため、大気海洋スケールに対して、比較的小さなスケールにおける乱流輸送を引き起こし、大気海洋スケールの大規模構造に影響を与える。よって、大気海洋現象の解明と予測においては、乱流の物理的理解が重要となる。

本研究では、乱流輸送現象の背後にある物理を、乱流に移流される二種の移流ベクトル場に対する数値シミュレーションを通じて明らかにする。流体の線素および面素に相当する双対な二つのベクトル場を解析することで、流体要素の変形の情報と、乱流輸送が引き起こすスケール間相互作用の情報の、双方を同時に抽出することが可能であり、その相互の非自明な関係を解き明かすことを目指す。

2. 数学的基礎付け

本研究では、以下の2つのベクトル場 α および β を導入する:

$$(\partial_t + u_j \partial_j) \alpha_i = \alpha_j \partial_j u_i + \kappa \Delta \alpha_i \quad \dots(1a)$$

$$(\partial_t + u_j \partial_j) \beta_i = -\beta_j \partial_j u_i + \kappa \Delta \beta_i \quad \dots(1b)$$

方程式(1a)が記述するベクトル場は、連続体力学における線素の概念に相当し、線素を場として与えた際の時間発展を与え、右辺第1項が流体運動に伴う線素の伸長を与える。方程式(1b)が記述するベクトル場は、同じく連続体力学における面素の概念に相当し、右辺第1項が流体運動に伴う面素の伸長を記述する。時間発展を安定化させるため、式(1a)-(1b)の右辺には拡散項が与えられている。連続体力学において知られているように、線素ベクトルと面素ベクトルは双対関係にあり、その不変量である内積は流体の体積素を与える。非圧縮流体においては、体積は時間発展において保存される。実際、 α と β の内積

(γ) の時間発展は次式で与えられる:

$$(\partial_t + u_j \partial_j) \gamma = O(\kappa) \quad \dots(2)$$

右辺は、拡散効果が効かない程度の、比較的大きなスケールにおいては、 γ はパッシブスカラーとして振る舞うことを意味する。すなわち、 α と β が、流体の変形を通じて伸長と収縮を繰り返していくにも関わらず、その内積である γ は保存量のように振る舞うことが分かる。従って、 α と β の間には、統計的に強い拘束が生じていることが予測される。

3. 数値計算

本研究においては、乱流輸送の基礎的な物理を抽出することを目的として、一様な乱流における乱流輸送を計算対象とした。計算を効率的かつ高精度に実行するために、スペクトル法を用いた。まず、物理空間を立方体領域とし、対面において周期境界条件を課し、空間的に一様な系と考える。さらに、乱流を記述する Navier-Stokes 方程式に加え、ベクトル対 α および β の運動方程式 (1a) と (1b) を、フーリエ空間において解く。これら方程式はいずれも非線形項に由来する畳み込み積分項を含むため、その計算手法として FFT (Fast Fourier Transform: 高速フーリエ変換) を利用した高効率計算アルゴリズムを採用した (Patterson & Orszag 1971)。時間積分手法として、4段4次ルンゲ-クッタ法を採用した。

初期時刻において、十分に発達した一様等方乱流場を与え、低波数にベクトルの初期場を与える。乱流は外力によって駆動し、ベクトル場 α と β には外力を与えないとする。

4. 数値計算結果

格子点数 512^3 の計算 (計算条件は表1を参照) について、その結果を報告する。

表1. 計算条件

n^3	ν	Re	$k_{\max} \eta$	Sc
512^3	8×10^{-4}	156	2.1	0.7

図1において、 α 、 β 、および γ のエネルギー($K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$)の時間発展を示す。初期時刻において、 γ がほぼ定常的に振舞っている様子が分かる。これは、高波数における拡散項の影響が現れるまで、 γ が保存的に振舞っていることを示す。

図2に、最終時刻における α 、 β および γ のスペクトルを示す。 α および β は、流体の伸長と圧縮を通じて発達し、慣性小領域においてエネルギー Spektral は正冪を示し、およそ $k_{\max} \eta = 0.2$ 周辺でピークに達し、より高波数においては拡散によって減衰する。 γ は、低波数においては γ を生成する機構がなく、なおかつ低波数領域から高波数へのカスケードが生じるため、低波数領域が α や β と比較して顕著に低い値を持つ。反面、高波数においては、拡散項の影響により α と β の間に非自明な相関を生じるため、 $k_{\max} \eta = 0.2$ 周辺にピークを持ち、より高波数においては減衰する。

図3において、 β のエネルギー Spektral の収支について、各項の寄与をスケール毎に示す。 D_β は拡散、 P_β は流体の伸長・収縮運動による生成項、 T_β は非線形項に由来する波数間輸送項である。低波数において主に流体の伸長・収縮運動によってベクトル場は発達し、波数間輸送を通じて高波数領域へ伝達し、拡散項によって消失している事が分かる。慣性小領域においては、ベクトル場の伸長・収縮による生成が、波数間輸送とほぼ釣り合う。ところが、式(2)で記述される γ は、この慣性小領域において、伸長・収縮運動の影響を受けないため、波数間輸送が生じなくなるまで γ は高波数へ輸送され続ける。その結果、慣性小領域における γ は枯渇し、慣性小領域における α と β は直交する。

5. 結論

乱流中の双対なベクトルの直接数値計算を実行し、解析を行なった。慣性小領域において、互いに双対なベクトル α と β は、流体の伸長・収縮運動に従って共に発達しつつ、波数間輸送によって小スケール成分をそれぞれ発達させてゆく。ところが、 α と β の内積である γ は高波数へカスケードすることで、慣性小領域から枯渇し、 α と β は互いに直交するようになる。直交状態になった後、 α と β は様々な伸長・収縮運動を受けるはずであるが、それにも関わらず α と β の直交状態は保たれる。そのため、 α 、 β および速度勾配の間に、統計的拘束が生じることが想定され、スケール間輸送と流体変形運動の関係を解き明かす重要な鍵となり得る。

謝辞

本研究の成果は、令和7年度地球シミュレータ公募課題として、海洋研究開発機構の支援のもとで、地球シミュレータを利用することで得られたものである。

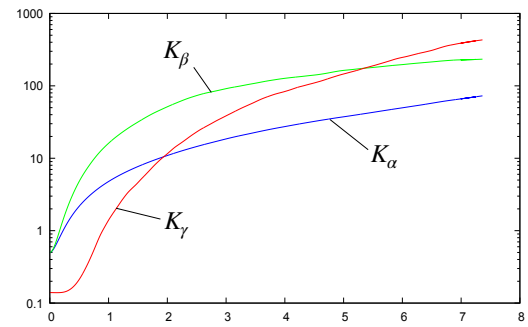


図1. 各場のエネルギーの時間発展. 横軸は最大渦の turnover time で規格化

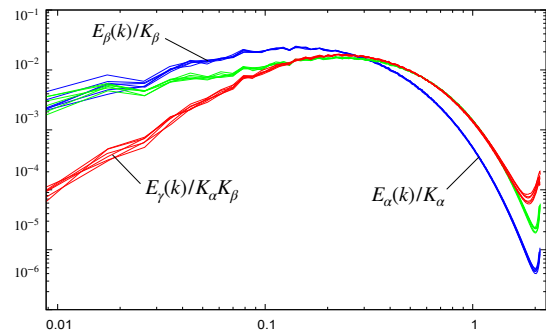


図2. 各場のエネルギー Spektral. 横軸は Kolmogorov scale で規格化

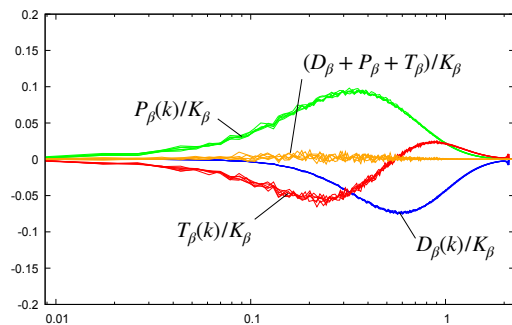


図3. β のエネルギー Spektral の収支